Министерство здравоохранения Российской Федерации
Государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Ростовский государственный медицинский университет
Министерства здравоохранения Российской Федерации»
КОЛЛЕДЖ

ЦК общегуманитарных, социально-экономических
и естественнонаучных дисциплин

Е.Ю. Скляр

Математика
Часть 2

Учебно-методическое пособие для обучающихся
по специальностям СПО укрупненной группы специальностей
Здравоохранение и медицинские науки
второе издание, переработанное и дополненное

Ростов-на-Дону
2014 г

УДК 614. (07)
УДК 614: 51.004 (07)
С 43

Скляр Е.Ю.
Учебно-методическое пособие (в 3-х частях) по дисциплине «Математика» второе издание, переработанное и дополненное / Е.Ю. Скляр - Ростов-на-Дону: ГБОУ ВПО РостГМУ Минздрав России, 2014, Часть 2 - 69 с.: ил.

Учебно-методическое пособие (в 3-х частях) по дисциплине «Математика» предназначено для студентов, обучающихся по специальностям СПО укрупненной группы специальностей Здравоохранение и медицинские науки. В пособии рассмотрены основы дифференциального и интегрального исчисления, дифференциальных уравнений, дискретной математики, теории вероятностей, математической статистики и применение математических методов в профессиональной деятельности среднего медперсонала. Изложение теоретического материала сопровождается примерами и задачами. В конце разделов приводятся задания для самостоятельной работы. Данное пособие дополнено приложением Графы.

Рецензенты:

Алексеева Н.А. Доцент по курсу «Информационные компьютерные технологии в медицине и здравоохранении» ФПК и ППС ГБОУ ВПО РостГМУ Минздрава России, к.б.н.

Артеменко Н.А. замдиректора по НМР колледжа ГБОУ ВПО РостГМУ Минздрава России

Рекомендовано к печати редакционно-издательским Советом ГБОУ ВПО РостГМУ Минздрава России.

Утверждено центральной методической комиссией ГБОУ ВПО РостГМУ Минздрава России (протокол № 4 от 02.12.2014 г)

Рассмотрено и рекомендовано к печати на заседании методического совета колледжа РостГМУ (протокол № 2 от 26.11.2014 г.).

Одобрено на заседании Цикловой комиссии общегуманитарных, социально-экономических и естественнонаучных дисциплин колледжа РостГМУ (протокол №3 от 15.10.2014 г.).

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие второе издание, переработанное и дополненное, составлено в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом СПО по специальностям 33.02.01 Фармация, 31.02.03 Лабораторная диагностика, 31.02.01 Лечебное дело, 34.02.01 Сестринское дело и разделено на 6 модулей, изданных в 3-х частях.

В первой части изложено содержание модуля 1 «Интегральное и дифференциальное исчисление» и модуля 2 «Дифференциальные уравнения и их применение в медицине»

Во второй части - содержание модуля 3 «Основы дискретной математики», модуля 4 «Основы теории вероятностей», модуля 5 «Математическая статистика», приложение Графы.

В третьей части - содержание модуля 6 «Применение математических методов в профессиональной деятельности среднего медперсонала».

Каждый модуль содержит краткую теоретическую часть и упражнения для практических занятий. По модулям 4 и 5 разработаны 2 лабораторные работы.

Учитывая профессиональную направленность курса математики, во всех модулях приведены примеры и предложены задачи из области фармакологии, биологии, медицины.

Настоящая брошюра представляет собой вторую часть учебного пособия, в котором рассматриваются основные понятия дискретной математики, теории вероятностей, математической и медицинской статистики. Математические статистические методы являются универсальным аппаратом исследования числовых данных. Сами данные, предоставляющие область медицины, биологии вносят свою специфику в постановку задачи и интерпретацию результатов.

Случай - только мера нашего невежества.
Случайными явлениями, если дать им
определение, будут те, законов которых
мы не знаем

А. Пуанкаре «Наука и гипотеза»

МОДУЛЬ 3 «ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ»

Дискретная математика *(конечная математика) - раздел математики, занимающийся изучением свойств объектов конечного характера.* К их числу могут быть отнесены конечные множества, графы, некоторые математические модели.

Дискретное множество

Под множеством понимается набор, совокупность, собрание каких – либо объектов (которые называются элементами множества). Множество, все элементы которого изолированы друг от друга, называются дискретным. Для измерения степени изолированности элементов данного множества, вводится понятие расстояние между элементами. Таким расстоянием для чисел может быть, например, модуль разности между ними; для точек на плоскости – геометрическое расстояние. Дискретное множество определяется как множество объектов, расстояние между которыми не меньше некоторой наперед заданной величины L. Конечное множество всегда дискретно (в качестве L берется минимальное из расстояний между элементами этого множества). Дискретно любое множество целых чисел (для них L = 1) и любое множество дробей имеющих общий знаменатель m. Всякое дискретное множество счетное, т.е. его элементы можно пронумеровать целыми числами. Однако не всякое счетное множество дискретно. Разница между дискретным и непрерывным представлением информации хорошо видна на примере часов. В электронных часах с цифровым циферблатом информация представляется дискретно – цифрами, каждая из которых четко отличается друг от друга. В механических часах со стрелочным циферблатом информация представляется непрерывно – положениями двух стрелок, причем два разных положения стрелки не всегда четко различимы (особенно если на циферблате нет минутных делений). Представление информации с помощью конечного множества символов (букв, цифр, знаков препинания, математических знаков) – дискретно. Графическое представление (рисунок, чертеж) – непрерывно.

Типичный пример дискретного устройства – ЭВМ, состояние памяти которой представляется последовательностью двоичных цифр – нулей и единиц, все операции в ней производится с дискретными представлениями информации. Типичные примеры аналоговых устройств – измерительные приборы, представляющие информацию положением стрелки (вольтметр, спидометр), непрерывной кривой, выдаваемой на экран (осциллограф) или на бумагу (кардиограф) и т.д. Переход от аналоговых представлений информации к цифровым (например, ввод результатов измерений ЭВМ) и обратно в технике называются аналогоцифровыми и цифро-аналоговыми преобразователями. Измерение температуры пациента – это работа с дискретными величинами, так как каждая конкретная температура – это отдельная дискретная величина. А создание кардиограммы сердца – это исследование непрерывной величины.

Элементы комбинаторики

При изучении курса математической статистики приходится использовать методы одного из разделов математики – комбинаторики, «науки о способах подсчета вариантов». Комбинаторика – сверстница теории вероятностей, теоретического фундамента прикладной статистики, она изучает простейшие соединения. Как и в древней, так и в современной статистике невозможно обойтись без навыков просчитывать в уме или, по крайней мере, быстро, по простым формулам, варианты событий, размещений предметов, значений величин и т.п. Рассмотрим пример решения практического вопроса с использованием правил комбинаторики. Пусть решается вопрос об установлении проводной связи между 10 предприятиями фирмы по следующему принципу – каждое предприятие должно иметь отдельный канал связи со всеми остальными. Сколько таких каналов придется установить в фирме? Для решения вопроса можно нарисовать выпуклый 10-угольник и провести в нем все диагонали, пересчитав в конце их число и не забыв добавить число сторон. Человек, знающий комбинаторику, укажет верный ответ – всего требуется 45 каналов. Рассмотрим основные понятия комбинаторики – перестановки, размещения и сочетания.

Перестановками называют операции над упорядоченным рядом из n различных объектов, в процессе которых «списочный состав» ряда не изменяется, но «места» объектов в этом ряду изменяются от варианта к варианту. Количество перестановок – это количество новых упорядоченных множеств, составленных из данного множества с тем же количеством элементов. Найти число перестановок в ряду из 1, 2 и 3 предметов.

Воспользуемся схемой:

$n = 1$	*A*	*1 вариант.*
$n = 2$	*AB BA*	$1 \cdot 2 = 2$ *варианта.*
$n = 3$	*ABC ACB BCA BAC CAB CBA*	$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ *вариантов.*

Число перестановок в ряду из n элементов составит: $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n,$

$n!$ – факториал числа n – произведение последовательных натуральных чисел от 1 до n.

Свойства перестановок: $1! = 1$; $0! = 1$.

<u>Пример</u> Дано множество $A = \{1, 2, 3\}$. Составим все перестановки чисел этого множества: 123, 132, 213, 231, 312, 321. Их 6. Вычислим по формуле $P(3) = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Иногда задача заключается в упорядочивании не всех n элементов, а лишь некоторого множества из m элементов. Такие упорядоченные последовательности называются размещениями.

Размещениями из n элементов по m A_n^m называют конечные упорядоченные множества, содержащие m элементов, выбранных из n элементов множества А. То есть, количество размещений – это количество новых упорядоченных множеств, составленных из данного множества с другим количеством элементов. Число всевозможных размещений вычисляется по формуле: $\boldsymbol{A_n^m} = \frac{n!}{(n-m)!}$ Свойства размещений: $A_n^1 = n$; $A_n^0 = 1$; $A_n^n = n!$

Пример Дано множество $A = \{1, 2, 3\}$.

Составим все размещения двух чисел этого множества: 12, 21, 13, 31, 23, 32. Их 6. Вычислим по формуле $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6$. Иногда возникает необходимость не учитывать порядок следования элементов в размещении. Такие множества называют сочетанием.

Сочетаниями из n элементов по m: C_n^m называют операции над множеством из n различных объектов, в процессе которых образуют подмножества из m элементов, взятых из исходного множества, так, чтобы варианты подмножеств отличались друг от друга хотя бы одним элементом. То есть количество сочетаний – это количество новых неупорядоченных множеств, составленных из данного множества с другим количеством элементов. Приведём примеры для числа сочетаний из 3 по 2 и из 5 по 3. Если элементы исходного множества А, В, С. Варианты подмножеств: АВ, АС, ВС – всего три. Если элементы исходного множества A, B, C, D, E. Варианты подмножеств: ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCE, BDE, CDE – всего десять. Если опыт состоит в выборе m элементов без возвращения и без упорядочивания, то различными исходами следует считать m – элементные подмножества, имеющие различный состав. Получаемые при этом комбинации элементов (элементарные исходы) носят название *сочетание из n элементов по m,* а их общее число определяется по формуле: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Пример Дано множество $A = \{1, 2, 3\}$.

Составим все сочетания двух чисел этого множества: 1 и 2, 2 и 3, 1 и 3. Их 3. Вычислим по формуле $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$.

Пример. В клетке содержится 10 мышей. Необходимо отобрать 4 мыши для проведения эксперимента. Сколькими способами это можно сделать? Так как порядок выбранных мышей не имеет значения, то используя формулу для вычисления сочетаний, имеем:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4!6!} = 210$$

Существует еще один способ вычисления числа сочетаний из n по m с использованием коэффициентов в развёрнутой форме бинома Ньютона (p – q) в степени n. В самом деле, например, при $n = 3$ коэффициенты при степенях разложения составляют 1, 3, 3, 1 – а это и есть сочетания из 3 по 0, 1, 2, 3 и 4 элементов. С помощью сочетаний рассчитывается треугольник Паскаля, который заполняется значениями C_n^m, если m меньше, или равно n.

n / m	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Проверяется треугольник Паскаля просто: первый элемент любого основания равен 1, второй равен номеру основания, а все последующие – сумме двух «вышестоящих» (верхнего и левого). Для чисел C_n^m, называемых также биномиальными коэффициентами, справедливы следующие тождества, часто оказывающиеся полезными при решении задач:

$C_n^m = C_n^{m-n}$ (свойство симметрии)

$C_{n+1}^{k} = C_n^{k} + C_n^{k-1}$; $C_n^0 = 1$ (рекуррентное соотношение);

$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$ (следствие биномиальной формулы Ньютона).

Для любого натурального n верна формула, называющаяся биномом Ньютона:

$(a+b)^n = C_n^0\, a^n + C_n^1\, a^{n-1} b + \ldots + C_n^m\, a^{n-m} b + \ldots + C_n^n\, b^n$ Коэффициенты C_n^m, равные числу сочетаний из n элементов по m, называются биномиальными коэффициентами. Частные случаи бинома Ньютона ($n = 2, 3$) входят в список формул сокращенного умножения:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \qquad a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \qquad a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$$

Основные формулы комбинаторики приведены ниже в таблице:

Понятия	Формулы для вычисления	Основные свойства
Перестановки	$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$	$1! = 1$; $0! = 1$
Размещения	$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$	$A_n^1 = n$; $A_n^0 = 1$; $A_n^n = n!$
Сочетания	$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$	$C_n^1 = n$; $C_n^0 = 1$; $C_n^n = 1$

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Логика – наука о формах и способах мышления, о способах доказательств и опровержений. Элементы логики используются в теоремах теории вероятности. Все положения логики основываются на понятиях, высказываниях и умозаключениях.

Понятие – определение чего-либо, указывающее его существенные признаки.

Утверждение – суждение, которое требуется доказать или опровергнуть.

Высказывание (суждение) – утверждение, для которого имеет смысл говорить, истинно оно или ложно. С высказываниями можно выполнять определенные действия, изучаемые в разделе логики - алгебре высказываний, в результате получается новые, составные высказывания.

Рассуждение – цепочка высказываний или утверждений, определенным образом связанных друг с другом.

Умозаключение – логическая операция, в результате которой из одного или нескольких данных суждений получается (выводится) новое суждение. Умозаключения бывают индуктивные, дедуктивные и по аналогии. Рассуждения и умозаключения чаще всего используются при доказательстве теорем в математике, выполнении преобразований выражений, решении задач. Для выполнения действий с логическими выражениями в математической логике создана алгебра высказываний (алгебра логики). Поскольку основы такой алгебры были заложены в трудах английского математика Джорджа Буля (XIX в.), то алгебра логики получила также название булевой алгебры. Логические выражения бывают простыми и сложными, будем их обозначать заглавными латинскими буквами. Логические выражения принимают значения 0 или 1. Например, А=<2·2=4> истинное высказывание, значит, А равно 1. В=<2·2 = 5> ложное высказывание, значит, В равно 0.

Рассмотрим три основных действия с высказываниями.

1. Отрицание

Простейшей логической операцией над высказываниями является отрицание (инверсия), соответствующее в обычном языке частице <не>. Выполнение операции отрицания над высказыванием А обозначается $\bar{A}$ и читается: <не А>. *Отрицанием высказывания называется такое высказывание $\bar{A}$, которое истинно, если данное высказывание ложно, и ложно, если данное высказывание истинно.* Инверсия обозначается верхней черточкой, ˥, НЕ, NOT. Значения логического действия записываются в таблицу истинности: 1 – истинное высказывание, 0 – ложное

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

2. Конъюнкция

Сложное высказывание может быть составлено из простых высказываний с помощью союза <и>. Пусть имеются два высказывания А и В. Высказывание, которое истинно в том и только в том случае, когда оба высказывания А и В истинны, называется конъюнкцией высказывания. (Конъюнкция (в переводе с латинского языка) означает<союз, связь>.) Конъюнкцию называют логическим умножением и обозначают ∧, &, AND, И, *. Значение конъюнкции двух выражений представлено в таблице истинности:

A	B	A ∧ B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. Дизъюнкция

Высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний А и В, называется дизъюнкцией высказывания. (Дизъюнкция (в переводе с латинского языка) означает <разобщение, различие>.) Дизъюнкцию называют логическим сложением и обозначают ∨, OR, ИЛИ, +. Значение дизъюнкции двух выражений представлено в таблице истинности:

A	B	A ∨ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Пример. Заполните таблицу истинности для выражения $Z=\bar{A} \wedge (B \vee C)$.

Решение:

A	B	C	$\bar{A}$	B ∨ C	$\bar{A} \wedge (B \vee C)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0

Модуль 4 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Случайные события и их вероятности

***Теория вероятностей** - это раздел математики изучающий закономерности массовых случайных событий.*

Рассмотрим основные термины и понятия теории вероятностей.

***Событие** (случайное событие)* - это факт, который при осуществлении определенных условий может произойти или нет, наступление которого нельзя гарантировать. События обозначают большими буквами латинского алфавита: *A, B,* C...Например, событие *A* -рождение мальчика, событие *B* -выигрыш в лотерее, событие C - выпадение цифры 4 при бросании игральной кости.

***Испытание** (опыт, эксперимент)* – это совокупность условий, при которых может произойти данное случайное событие. Например, завтра днем ожидается дождь. В этом примере наступление дня является испытанием, а выпадение дождя - случайное событие.

Случайность того или иного события определяется множеством причин, которые существуют объективно, но учесть их все, а также степень их влияния на изучаемое событие, невозможно. К таким случайным событием относятся: выпадение того или иного числа при бросании игральной кости, выигрыш в лотереи, количество больных записавшихся на прием к врачу, количество родившихся в роддоме детей и т.п. И хотя в каждом конкретном случае трудно предсказать исход испытания, при достаточно большом числе наблюдений можно установить наличие некоторой закономерности. Подбрасывая монету можно заметить, что число выпадения орла и решки примерно одинаково, а при бросании игральной кости, различные грани, также появляются, примерно одинаково. Это говорит, что случайным явлениям присущи свои закономерности, но они проявляются лишь при большом количестве испытаний. Правильность этого подтверждает закон больших чисел, который лежит в основе теории вероятностей.

Достоверное событие - это событие, которое в результате испытания непременно должно произойти. Например, при бросании одного игрального кубика выпадает число меньшее семи.

Невозможное событие - это событие, которое в результате испытания не может произойти. Например, в ранее рассмотренном примере - это выпадение цифры 7.

Несовместными называются события, если в результате данного испытания появление одного из них исключает появление другого. Например, при бросании монеты одновременное выпадение орла и решки есть событие несовместное.

Совместными называются события, если в результате данного испытания появление одного из них не исключает появление другого. Например, при игре в карты появление валета и масти пик - события совместные.

Равновозможными называются события, если нет оснований считать, что одно из них происходит чаще, чем другое. Например, выпадение любой грани игрального кубика есть равновозможное событие.

События образуют ***полную группу событий***, если в результате испытания обязательно произойдет хотя бы одно из них и любые два из них несовместны. Например, при 10 выстрелах в мишень возможно от 0 до 10 попаданий. При бросании игрального кубика может выпасть цифра от 1 до 6. Эти события образуют полную группу.

События, входящие в полную группу попарно несовместных и равновозможных событий, называются ***исходами*** или *элементарными событиями.*

Частным случаем событий, образующих полную группу, являются противоположные события. Два несовместных события A и $\bar{A}$ (читается «не A») называются ***противоположными***, если в результате испытания одно из них должно обязательно произойти. Например, если стипендия начисляется только при получении на экзамене хороших и отличных оценок, то события «стипендия» и «неудовлетворительная или удовлетворительная оценка» - противоположные.

Событие A называется *благоприятствующим* событию B, если появление события A влечет за собой появление события B.

Например, при бросании игрального кубика - появлению нечетного числа благоприятствуют события, связанные с выпадением чисел - 1, 3.

Определение вероятности события

Вероятность события - это число, характеризующее степень возможности появления событий при их многократном повторении.

Вероятность обозначается буквой P (probability*(англ.)* -вероятность). Вероятность является одним из основных понятий теории вероятностей. Существует несколько определений этого понятия. *Классическое* определение вероятности заключается в следующем. Если известны все возможные исходы испытания и нет оснований считать, что одно случайное событие появлялось бы чаще других, т.е. события равновозможные и несовместные, то имеется возможность аналитического определения вероятности события.

Вероятностью $P(A)$ события A называется отношение числа благоприятствующих исходов m к общему числу равновозможных несовместных исходов n:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Свойства вероятности:

1. Вероятность случайного события A находится между0 и 1.
2. Вероятность достоверного события равна 1.
3. Вероятность невозможного события равна 0.

Пример

В урне 10 белых, 5 красных и 5 зеленых шаров. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет цветным (не белым).

Решение:

Число исходов, благоприятствующих событию *A,* равно сумме красных и зеленых шаров: m = 10. Общее число равновозможных несовместных исходов равно общему числу шаров в урне: n = 20. Тогда: P(A)=10/20=0,5.

Пример

Все натуральные числа от 1 до 30 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным 5?

Решение: Обозначим через *A* событие, состоящее в том, что число на взятой карточке кратно 5. В данном испытании имеется 30 равновозможных исходов, из которых событию *A* благоприятствуют 6 исходов (5,10,15,20,25,30). Следовательно, $P(A) = 6/30 = 0,2$.

Пример

Подбрасываются 2 монеты. Какова вероятность, что обе упадут «гербом» кверху?

Решение:: 4 исхода бросания двух монет: ГГ, ГР, РГ, РР.

Пусть событие *A* — «выпали 2 герба» — этому событию благоприятствует один исход.

$$P(A) = \frac{m}{n} = 1/4 = 0,25.$$

Пример

Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее - получить в сумме 7 или 8?

Решение: Обозначим события: *A* - «выпало 7 очков», *B* - «выпало 8 очков».

Событию А благоприятствуют 6 элементарных исходов: (1;6),(2;5),(3;4),(4;3),(5;2),(6;1).

Событию *B* благоприятствует 5 исходов: (2;6), (3;5), (4;4), (5;3), (6;2).

Всех равновозможных исходов $n = 6^2 = 36$. $P(A) = 6/36 = 0,167$, $P(B) = 5/36 = 0,139$.

Итак, $P(A) > P(B)$ получить в сумме 7 очков более вероятное событие, чем получить в сумме 8 очков.

При определении вероятности события по ее классическому определению требуется выполнение определенных условий. Эти условия заключаются в равновозможности и несовместности событий, входящих в полную группу событий, вероятность которых надо определить. На практике не всегда можно определить все возможные варианты исходов, а тем более обосновать их равновозможность. На практике это не всегда возможно. Поэтому при невозможности удовлетворения требованиям классического определения вероятности используют статистическую оценку вероятности события. При этом вводится понятие *относительной частоты* появления события, равной отношению m/*n, где m –число испытаний, в которых произошло событие A; n – общее число испытаний.*

Я. Бернулли доказал, что при неограниченном увеличении числа испытаний относительная частота события *A* будет сколь угодно мало отличатся от вероятности события *A*. $\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n} = \mathrm{P(A)}$.

Это равенство справедливо при неизменности условий, при которых проводится эксперимент. Справедливость теоремы Бернулли была доказана и в многочисленных опытах по сравнению вероятностей вычисленных классическим и статистическим методами. Так в опытах Пирсона по определению вероятности выпадения «герба» при 12000 бросков, статистическая вероятность была равна 0,5016, а при 24000 бросков - 0,5005, что показывает приближение к значению вероятности 0,5 по мере увеличения числа опытов. Близость значений вероятности определенных различными способами указывают на объективность возможности наступления этого события.

Статистическое определение вероятности

Относительная частота события — это доля тех *фактически проведенных* испытаний, в которых событие *A* появилось $W = P^*(A) = \frac{m}{n}$. Это опытная экспериментальная характеристика, где *m* - число опытов, в которых появилось событие A; *n* - число всех проведенных опытов.

Вероятностью события называется число, около которого группируются значения частоты данного события в различных сериях большого числа испытаний $P(A) = \lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}$

Пример. Из 982 больных, поступивших в хирургическую больницу за месяц, 275 человек имели травмы. Какова относительная частота поступления больных с этим видом заболевания?

Решение: $\mathrm{P^*(A)} = \frac{275}{982}$

Задачи для самостоятельного решения

1. Среди 1000 новорожденных оказались 515 мальчиков. Чему равна частота рождения мальчиков?
2. Частота нормального выхода семян W=0,97. Из высеянных семян взошло 970. Сколько семян было высеяно?
3. На отрезке натурального ряда от 1 до 20 найти частоту простых чисел.
4. Для выявления качества семян было отобрано и высеяно в лабораторных условиях 100 штук, из которых 93 дали нормальный всход. Какова частота нормального всхода семян?
5. В серии многократных подбрасываний монет было сделано в первом случае 4040 подбрасываний, и герб появился в 2048 случаях. Во втором случае было сделано 24000 подбрасываний, и герб появился в 12012 случаях. Сделайте вывод о частоте появления герба в каждой серии испытаний.

6. Среди 300 пробирок, изготовленных на автоматической линии, оказалось 15 не отвечающих стандарту. Найти частоту появления нестандартных пробирок.

Теоремы сложения вероятностей

Теорема. Вероятность суммы дух несовместных событий А и В равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B) = P(A) + P(B)$

Пример. Найти вероятность выпадения цифры 2 или 3 при бросании игральной кости.

$P(A+B) = P(A) + P(B)= 1/6+ 1/6= 2/6= 1/3$

В том случае, если события *А и В* являются совместными, то справедлива следующая теорема.

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления, т.е.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A/B).$$

Пример Вероятность попадания в мишень одного стрелка равна 0,65, а второго 0,6. Определить вероятность поражения мишени при одновременных выстрелах двух стрелков.

Решение: Так как при стрельбе возможно попадание в мишень двумя стрелками, то эти события совместные, следовательно, $P(A + B)=P(A) + P(B) - P(A/B) =$ 0,65 + 0,6 - 0,39 = 0,86.

Теорема умножения вероятностей

Событие *А* называется *независимым* от события *В,* если вероятность осуществления события *А* не зависит от того произошло событие *В* или нет. *Например*, при повторении бросания игральной кости вероятность выпадения цифры 1 (событие А) не зависит от появления или не появления цифры 1 при первом бросании кости (событие *В).*

Событие А, называется *зависимым* от события *В,* если его вероятность меняется в зависимости от того, произошло событие *В* или нет. *Например***,** если в урне находятся черные и белые шары, то вероятность повторного появления черного шара (событие А) будет зависеть от того, какой шар вынули первый раз. В случае зависимых событий А и В вводится понятие ус*ловной вероятности,* под которой понимается вероятность события *А* при условии, что событие В произошло. Обозначается *P(A/B).*

Пример. В урне находится 10 шаров: 3 белых и 7 черных. Первым был вынут черный шар, найти вероятность того, что второй шар будет черным.

Решение: Вероятность появления черного щара первый раз (событие *В)* равно $P(B) =$ 7/10; а вероятность появления его второй раз (событие А), при условии, что событие В произошло, равно $P(A/B) =$ 6/9, т.к. в урне осталось 9 шаров, из них 6 черных.

Пример. В коробке содержится 3 белых и 3 желтых таблетки. Из коробки дважды вынимают наугад по одной таблетке, не возвращая их в коробку. Найти вероятность появления белых таблеток при втором испытании (событие В), если при первом испытании была извлечена желтая таблетка (событие А).

Решение: После первого испытания в коробе осталось 5 таблеток, из них 3 белых. Искомое условие вероятности: $P(B/A) = 3/5 = 0,6$.

Рассмотрим закон умножения вероятностей для независимых событий.

Произведением двух событий *A и B* называют событие $C = A \cdot B$, состоящее в совместном осуществлении этих событий.

Теорема. Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий: $P(A$ и $B) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Рассмотрим закон умножения вероятностей для зависимых событий.

Теорема. Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению одного из них на условную вероятность второго, вычисленную при условии, что первое событие осуществилось. $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(A/B)$.

Пример. В группе из 20 человек, 5 студентов не подготовили задание. Какова вероятность того, что два первых студента, вызванные наугад, будут не готовы к ответу.

Решение: Вероятность того, что первый студент не готов к ответу $P(A)=5/20$, *вероятность, что и второй студент не подготовлен* $P(A)=4/19$ *тогда,*

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(A/B)=5/20 \cdot 4/19=20/380=0,05$.

Пример. Бросили два игральных кубика. Какова вероятность появления двух пятерок?

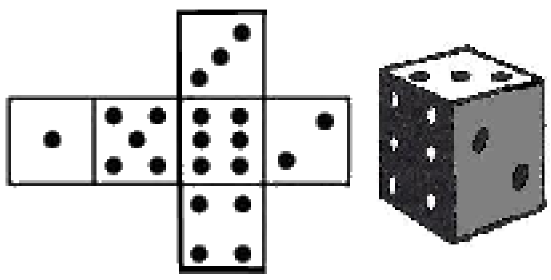
Решение:

1-й способ. Рассмотрим два события: событие А – на первом кубике выпала 5, событие В - на втором кубике тоже 5.

$P_A = 1/6$, $P_B = 1/6$ $P_{A\text{ и }B} = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$

2-й способ. Рассмотрим все возможные исходы при бросании двух кубиков.

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66



Из таблицы видно, что общее число исходов равно 36. Благоприятный исход для нашего случайного события – 1. Значит, вероятность $P = 1/36$. *Ответ:* 1/36

Пример. В ящике 5 черных, 3 белых и 2 красных шара. Какова вероятность вынуть: а) белый шар; б) красный шар; в) белый или красный шар; г) белый и красный, если первый взятый шар кладется обратно; д) белый и красный, если первый шар обратно не возвращается?

Решение: а) $P = 0,3$; б) $P = 0,2$; в) $P = 0,3 + 0,2 = 0,5$; г) $P = 0,3 \cdot 0,2 = 0,6$;

д) $P = 0,3 \cdot 2/9 \approx 0,067$ или $P = 0,2 \cdot 3/9 \approx 0,067$.

Формула полной вероятности (Байеса)

Формула полной вероятности является обобщением теорем умножения и сложения вероятностей. Применяется для решения задач на определение вероятности события, которое может произойти с одним из несовместных событий, образующих полную группу.

Пусть некоторое событие А может произойти лишь вместе с одним из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, имеющих вероятности $P(H_1)$, $P(H_2)$, , $P(H_n)$ и $\sum_{i=1}^{n} P(Hi) = 1$

Такие события H_i называются гипотезами. P(A/H)

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

Классическое определение вероятности

1. Из букв слова «дифференциал» наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что это буква будет: а) гласной; б) согласной в) «ч»?

2. Из букв слова «вероятность» наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что выбранная буква будет: А - согласной; В - гласной; С - буква «о».

3. Цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 написаны на карточках, которые тщательно перемешаны. Произвольным образом вынимаются подряд 3 карточки и кладутся в ряд. Какова вероятность, что число, составленное из трех цифр, которые написаны на карточках, больше 987.

4. В популяции из 2000 плодовых мушек у 250 особей обнаруживают рецессивный признак крыла *W* у 150 — рецессивный признак глаза *Е.* Предположим, что у 50 мушек обнаруживают оба признака. Для эксперимента по скрещиванию из популяции выбирают одну мушку. Какова вероятность, что у этой мушки будет признак *W? Е?* Какова вероятность, что присутствует признак *W и Е?*

5. В картотеке имеются истории болезней 8 пациентов. Если наугад взять первую, затем вторую, третью и т.д. истории болезней, то какова вероятность в каждом случае изъятия нужной истории болезни? Предполагается, что искомая история болезни имеется в картотеке. Рассмотрите 2 варианта: а) взятые истории болезней не возвращаются в картотеку; б) взятые истории болезней каждый раз возвращаются в картотеку и хаотически располагаются в ней.

6. В коробке находится 10 шаров: 3 белых и 7 черных. Из нее наугад извлекается один шар. Какова вероятность того, что этот шар будет белым? Черным?

7. В коробке имеется 7 желтых и несколько белых таблеток. Какова вероятность вытащить белую таблетку, если вероятность вытащить желтую таблетку равна *—1/6.* Сколько белых таблеток в коробке?

8. Бросают две монеты. Найти вероятность того, что хотя бы на одной монете появится «герб. Найти вероятность того, что ни на одной монете не появится «герб».

9. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 10. Какова вероятность того, что это число является простым?

10. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру, и набрал ее наугад. Какова

вероятность того, что набранная цифра правильная?

11. Все натуральные числа от 1 до 30 написаны на одинаковых карточках и положены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным 5?

12. Бросаются две монеты. Какова вероятность, что обе монеты упадут «решкой» кверху:

13. В урне 6 белых и 4 черных шаров. Из урны вынимают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны вынимают еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже будет белым.

14. Из урны, содержащей 10 белых шаров и 8 черных, вынимают подряд все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что вторым по порядку будет вынут белый шар.

15. В первом ящике находятся шары с номерами от 1 до 5, а во втором - с номерами от 6 до 10. Из каждого ящика вынули по одному шару. Найти вероятности следующих событий:

16. Игральная кость бросается один раз. Найти вероятность следующих событий:

А - появление не менее 4 очков; В - появление не более 4 очков.

17. Игральная кость бросается два раза. Найти вероятность того, что оба раза появится одинаковое число очков.

18. Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятности событий: А - сумма выпавших очков равна 6; В - произведение выпавших очков равно 6.

19. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что абсолютная величина разности выпавших очков равна 2?

20. В лотерее 1000 билетов. Из них на два билета выпадает выигрыш 200 рублей, на четыре билета выигрыш - 100 рублей, на десять - по 20 рублей, на тридцать - по 10 рублей, на пятьдесят - по 5 рублей, на 200 билетов - по 1 рублю, остальные билеты без выигрыша. Какова вероятность выиграть по билету не менее 5 рублей?

21. Произвольным образом выбирается двузначное число. Какова вероятность того, что это число окажется: А - кратным 3; В - кратным 6; С - кратным 50.

22. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 10. Какова вероятность того, что это число является простым?

23. На странице книги имеется 2500 букв. Буква «а» встречается 190 раз. Какова вероятность того, что случайно выбранная буква не есть буква «а»?

Теоремы сложения и умножения вероятностей

1. В ящике находятся пуговицы различных цветов: белых - 50%; красных - 20%; зеленых - 20%; синих - 10%. Какова вероятность того, что взятая наугад пуговица окажется синего или зеленого цвета.

2. Вероятность того, что стрелок, произведя выстрел, выбивает 10 очков, равна 0,4; 9 очков - 0,3 и, наконец, 8 или меньше очков - 0,3. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет не менее 9 очков.

3. В магазин поступили телевизоры, 60% которых поставило первое предприятие, 25% - второе и 15% - третье. Какова вероятность того, что купленный телевизор изготовлен на первом или третьем предприятии.

4. При записи фамилий участников соревнований, общее число которых 420, оказалось, что начальной буквой фамилий у 10 из них была А, у 6 - Е, у 9 - И, у 12 - О, у 5 -У, у 3 - Ю, у всех остальных фамилия начиналась с согласной. Определить вероятность того, что фамилия участника начинается с гласной.

5. Вероятность попадания в мишень для первого спортсмена 0,85, а для второго - 0,8. Спортсмены независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Найти вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один спортсмен.

6. Один стрелок поражает цель с вероятностью 90%, другой с вероятностью 75%. Найти вероятность поражения цели, если оба стрелка стреляют в нее одновременно. Цель считается пораженной при попадании в нее хотя бы одной из двух пуль.

7. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Какова вероятность того, что будет вынута пика или туз?

8. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет четное или кратное трем число очков.

9. Консультационный пункт университета получает пакеты с контрольными работами из городов A, B и С. вероятность получения пакета из города A равна 0,6, а из города B - 0,1. Найти вероятность того, что очередной пакет будет получен из города C.

10. С первого предприятия поступило 200 пробирок, из которых 190 стандартных, а со второго - 300, из которых 280 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу взятая пробирка будет стандартной.

11. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 2, либо 5, либо тому и другому одновременно.

12. В ящике имеются 30 шаров белого цвета и 5 - черного цвета. Из ящика наудачу берут один за другим 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара окажутся черными.

13. В мастерской два мастера работают независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа первый мотор не потребует внимание мастера, равна 0,9, для второго мотора эта вероятность равна 0,89. Найти вероятность того, что в течение часа ни один из моторов не потребует внимание мастера.

14. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75, для второго - 0,8, для третьего - 0,9. Определить вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель.

15. В условиях предыдущей задачи определить вероятность того, что в цель попадет хотя бы один стрелок.

16. В урне 5 белых и 10 черных шаров. Из урны вынимается один шар, отмечается его цвет и шар возвращается в урну. После этого из урны берется еще один шар. Найти вероятность того, что оба вынутые шара будут белыми.

17. В урне 3 белых и 6 черных шаров. Из урны вынимаются сразу два шара. Найти вероятность того, что эти шары будут разных цветов.

18. Студент пришел на зачет, зная из 30 вопросов только 24. Какова вероятность сдать зачет, если после отказа отвечать на вопрос преподаватель задает еще один вопрос?

19. Вероятность того, что в течении одного рабочего дня возникнет неполадка в определенном медицинском приборе равна 0,05. Какова вероятность того, что не произойдет ни одной неполадки за 3 рабочих дня?

20. Три охотника одновременно стреляют в зайца. Шанс на успех первого охотника расценивается как 3 из 5; второго - 3 из 10; наконец, для третьего охотника они составляют лишь 1 из 10. Какова вероятность того, что заяц будет подстрелен?

21. Вероятность того, что в летнюю сессию студент сдаст первый экзамен равна 0,8; второй - 0,9; третий - 0,8. Найти вероятность того, что он сдаст только первый экзамен?

22. Предположим, что в некоторой семье имеется 2 ребенка.

1) Какова вероятность того, что оба ребенка - девочки?

2) Если известно, что, по крайней мере, один ребенок девочка, то какова вероятность того, что обе - девочки?

3) Если известно, что старший ребенок - девочка, то какова вероятность, что оба ребенка девочки?

23. Вероятность того, что в летнюю сессию студент сдаст первый экзамен равна 0,8; второй экзамен - 0,9; третий экзамен - 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст хотя бы один экзамен.

24. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

25. Отдел технического контроля проверяет медицинское изделие на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.

Закон распределения дискретной случайной величины

Случайной называют величину, которая принимает в результате испытания то или иное возможное значение, заранее неизвестное, меняющееся от испытания к испытанию и зависящее от случайных обстоятельств.

Случайные величины могут быть дискретными и непрерывными.

Дискретной называют такую случайную величину, которая принимает счетное множество значений, т.е. такое множество, элементы которого можно подсчитать. Примером дискретной величины является количество студентов на лекции, число бракованных изделий в поставленной продукции, число новорожденных за сутки.

Непрерывной называют такую случайную величину, которая может принимать любые значения в определенном интервале. Занумеровать все значения величины, попадающие даже в узкий интервал принципиально невозможно. Эти значения образуют несчетное бесконечное множество. Например, температура тела пациента за определенный промежуток времени; дальность полета футбольного мяча, объем утечки воды из городского водопровода. Случайные величины обозначают прописными буквами латинского алфавита *X, У, Z,* а их возможное значение - соответствующими строчными буквами *x, y, z*.

При многократных испытаниях определенные значения случайной величины могут встречаться несколько раз. Поэтому, для задания случайной величины недостаточно перечислить лишь все ее возможные значения. Необходимо также знать, как часто могут появляться те или иные значения в результате испытания при одних и тех же условиях, т.е. нужно задать вероятности их появления. Случайная величина считается заданной, если известен закон распределения случайной величины.

Закон распределения случайной величины – это соответствие между возможными значениями дискретной случайной величины и ее вероятностями, обычно записывается в виде таблицы:

Значение случайной величины X_i	X_1	X_2	…	X_n
Вероятности значений P_i	P_1	P_2	…	P_n

Так как в результате испытания случайная величина X всегда примет одно из своих возможных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то эти случайные события образуют полную группу событий и $P_1 + P_2 + \ldots + P_n = 1$.

Табличную формулу задания называют также ***рядом распределения***. Для наглядности ряд распределения можно представить в графическом виде, где по оси абсцисс откладываются значения случайной величины, а по оси ординат вероятности этих значений. Соединение образует ломаную линию. ***Это многоугольник или полигон распределения вероятностей.***

Статистическое определение вероятности выражается через относительную частоту случайного события, т.е. находится как отношение количества случайных величин к общему числу случайных величин.

Задают ли законы распределения дискретной случайной величины следующие таблицы?

а)

x_i	2	3	4	5
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

б)

x_i	6	7	8	9
p_i	0,1	0,2	0,3	0,5

Решение:

а) Да, т.к. выполняется условие: $0,1+0,4+0,3+0,2=1$

б) Нет, т.к. $0,1+0,2+0,3+0,5\neq1$

Числовые характеристики случайных величин

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений значений величины X на вероятности этих значений. Обозначают $\overline{X}$ или M(X):

$$\overline{X} = M(X) = X_1P_1 + X_2\,P_2 + + X_n\,P_n = \sum_{i=1}^{n} Xi\ Pi$$

Рассеяние случайной величины относительно ее математического ожидания определяется с помощью числовой характеристики, называемой дисперсией. Проще говоря, дисперсия – это разброс случайной величины относительно среднего значения. Для понятия сущности дисперсии рассмотрим пример. Средняя заработная плата по стране составляет около 25 тысяч рублей. Откуда берется эта цифра? Складываются все зарплаты и делятся на количество работников. В данном случае очень большая дисперсия (минимальная зарплата около 4 тыс. руб., а максимальная – около 100 тыс. руб.). Если бы зарплата у всех была одинаковой, то дисперсия была бы равна нулю, и разброса бы не было.

Дисперсией дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата разности случайной величины и ее математического ожидания :$D = M[(X - M(X))^2]$

Используя определение математического ожидания для вычисления дисперсии, получаем формулу: $$D = \sum_{i=1}^{n}(\,Xi\ - M(X))^2\ Pi$$

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. В тех случаях, когда нужно иметь числовую характеристику рассеяния возможных значений в той же размерности, что и сама случайная величина, используют среднее квадратичное отклонение.

Среднее квадратическое отклонение случайной величины это корень квадратный из ее дисперсии σ(сигма) = $\sqrt{D}$

Среднее квадратичное отклонение есть мера рассеяния значений случайной величины около ее математического ожидания. Дает представление о размахе колебания случайной величины.

Пример Закон распределения случайной величины X задан следующей таблицей:

X	1	2	4	5
P	0,1	0,4	0,4	0,1

Найдите ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение: Используем приведенные выше формулы:

$\bar{X}$=M(X)=1·0,1+2·0,4+4·0,4+5·0,1·=3

D= $(1\text{-}3)^2\cdot 0{,}1+(2\text{-}3)^2\cdot 0{,}4+(4\text{-}3)^2\cdot 0{,}4+(\cdot 5\text{-}3)^{2} 0{,}1=1{,}6$.

$\sigma = \sqrt{1{,}6} = 1{,}26$.

Задания для самостоятельной работы

1. Найти дисперсию случайной величины X, зная закон ее распределения. Построить многоугольник распределения.

x_i	0.1	2	10	20
p_i	0.4	0.2	0.15	0.25

2. Найти дисперсию случайной величины X, зная закон ее распределения. Построить многоугольник распределения.

x_i	-1	1	2	3
p_i	0.48	0.01	0.09	0.42

3. Найти дисперсию случайной величины X, зная закон ее распределения.

x_i	-1	1	2	3
p_i	0.19	0.51	0.25	0.05

4. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, зная закон ее распределения.

x_i	3	5	2
p_i	0.1	0.6	0.3

5. Построить многоугольник распределения Найти дисперсию случайной величины X.

x_i	2	3	5
p_i	0.1	0.6	0.3

6. Дискретная случайной величины X имеет закон распределения.

x_i	0.2	0.4	0.6	0.8	1
p_i	0.1	0.2	0.4	P_4	0.1

Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию.

7.Задают ли закон распределения дискретной случайной величины каждая из таблиц. Если «да», то найдите дисперсию случайной величины.

1.

x_i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
p_i	*0,05*	*0,15*	*0,20*	*0,25*	*0,35*

2.

x_i	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
p_i	*0,1*	*0,2*	*0,3*	*0,4*	*0,5*

3.

x_i	*0*	*1*	*2*	*3*
p_i	*0,03*	*0,34*	*0,51*	*0,12*

4.

x_i	*0*	*1*	*2*
p_i	*0,25*	*0,50*	*0,25*

5.

x_i	*0*	*1*	*2*	*3*
p_i	*0,04*	*0,44*	*0,41*	*0,42*

6.

x_i	*4*	*5*	*6*	*7*
p_i	*0,03*	*0,34*	*0,51*	*0,12*

7.

x_i	*8*	*9*	*10*	*11*
p_i	*0,03*	*0,34*	*0,51*	*0,12*

Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, если ее закон распределения задан таблицей:

Вариант 1.

X	17	19	20	25	31	32	33	40	41
Р	0,05	0,1	0,11	0,15	0,2	0,15	0,1	0,09	0,05

Вариант 2.

X	5	9	10	12	15	18	20	23	24
P	0,01	0,03	0,05	0,15	0,43	0,15	0,1	0,05	0,03

Вариант 3.

X	90	92	93	98	104	105	106	113	114
P	0,05	0,1	0,11	0,15	0,2	0,15	0,1	0,09	0,05

Вариант 4.

X	18	19	21	25	28	32	34	39	40
P	0,05	0,1	0,11	0,12	0,24	0,12	0,11	0,1	0,05

Вариант 5.

X	47	49	50	51	52 53		55	60	61
P	0,01	0,03	0,05	0,15	0,4	0,18	0,1	0,05	0,03

Вариант 6.

X	1	5	10	11	15	19	25	30	35
P	0,02	0,08	0,13	0,16	0,3	0,16	0,1	0,04	0,01

Вариант 7.

X	107	109	112	125	131	132	133	140	141
P	0,05	0,1	0,11	0,15	0,2	0,15	0,1	0,09	0,05

Вариант 8.

X	67	68	71	74	76	78	81	84	88
P	0,05	0,1	0,11	0,15	0,17	0,15	0,12	0,1	0,05

Вариант 9.

X	12	15	18	21	22	25	29	31	32
P	0,05	0,1	0,11	0,15	0,2	0,15	0,1	0,09	0,05

Вариант 10.

X	1,7	1,9	2,0	2,5	3,1	3,2	3,3	4,0	4,1
P	0,01	0,04	0,1	0,15	0,4	0,15	0,09	0,04	0,02

Вариант 11.

X	5	9	10	12	15	18	20	23	24
P	0,01	0,03	0,05	0,15	0,43	0,15	0,1	0,05	0,03

Вариант 12.

X	90	92	93	98	104	105	106	113	114
P	0,05	0,1	0,11	0,15	0,2	0,15	0,1	0,09	0,05

Вариант 13.

X	18	19	21	25	28	32	34	39	40
P	0,05	0,1	0,11	0,12	0,24	0,12	0,11	0,1	0,05

Вариант 14.

X	47	49	50	51	52 53		55	60	61
P	0,01	0,03	0,05	0,15	0,4	0,18	0,1	0,05	0,03

Вариант 15.

X	67	68	71	74	76	78	81	84	88
P	0,05	0,1	0,11	0,15	0,17	0,15	0,12	0,1	0,05

МОДУЛЬ 5 ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Математическая статистика – это раздел математики, изучающий методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений с целью выявления существующих закономерностей.

Предметом математической статистики является изучение случайных величин (или случайных событий) по результатам наблюдений.

Среди многообразия задач математической статистики можно выделить следующие:

1. задача нахождения закона распределения случайной величины по наблюдаемым данным;
2. задача нахождения параметров распределения;
3. проверка согласованности теории с данными опыта;
4. задача установления и исследования различного рода зависимостей на основании экспериментальных данных.

Исходным материалом для любого статистического исследования являются статистические данные. Под статистическими данными понимаются сведения о числе объектов, какой либо обширной совокупности, обладающих теми или иными признаками (число студентов, родившихся в 1999 г.).

На основании статистических данных можно сделать определенные научно обоснованные выводы. Для этого статистические данные должны быть предварительно определенным образом систематизированы и обработаны. Одним из основных методов обработки статистических данных является выборочный метод.

Выборочный метод

При выборочном исследовании из всей совокупности отбирают некоторым образом определенное число объектов и только их подвергают исследованию.

Совокупность всех исследуемых объектов называют *генеральной совокупностью*. Число всех наблюдений, составляющих генеральную совокупность, называется ее объемом N. Например, популяция представляет собой множество индивидуумов. Изучение целой популяции трудоемко и дорого и, может быть, просто невозможно. Поэтому собирают данные по выборке индивидуумов, которых считают представителями этой популяции, позволяющими сделать вывод относительно этой популяции.

Выборкой называют совокупность случайно отобранных из генеральной совокупности объектов, по свойствам которой судят о генеральной совокупности.

Число объектов выборки называют *объемом выборки*.

Пример. Из 10000 студентов для контрольной флюорографии отобрано 100 студентов, то объем генеральной совокупности равен 10000, а объем выборки равен 100.

Выборка (выборочная совокупность) обязательно должна быть *репрезентативной*, т.е. давать обоснованное представление о генеральной совокупности. Выборка (выборочная совокупность) должна отражать свойства генеральной совокупности, т. е. правильно ее отражать, например, берут одну клинику, больницу и исследуют всех пациентов в этой клинике с данным заболеванием.

Выборку, представляющую собой неубывающую последовательность чисел, называют *вариационным рядом*. Любую числовую выборку можно записать в виде вариационного ряда. Каждый элемент выборки x_i - называется *вариантой.* Число наблюдений варианты n_i называется *частотой встречаемости.* Разность между наибольшим и наименьшим значением числовой выборки называют *размахом выборки*. Последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, называется *вариационным рядом. Статистическое распределение* — это совокупность вариант $x.$ и соответствующих им частот n_i.

Пример выборка: 1,10,-2,0,-2,5,1,10,7.

вариационный ряд: -2,-2,0,1,1,5,7,10.

Объем выборки: n=8, размах выборки:10-(-2)=12.

Пусть из генеральной совокупности получена выборка объема n, причем x_i появляется в ней n_1 раз, значение x_2 – n_2 раз и т. д. В этом случае числа n_1, n_2,…, n_k называют частотами значения выборки. Отношения $\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \ldots, \frac{n_k}{n}$ называют относительными частотами значения выборки: $n_1 + n_2 + n_k + \ldots + n_k = n$ $\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \ldots, \frac{n_k}{n} = 1$

Последовательность пар $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \ldots, (x_k, n_k)$ называют *статистическим рядом.*

Обычно статистический ряд записывают в виде таблицы, где *x* - значение выборки, а *n* - частоты значения выборки, $\frac{n_k}{n}$ - относительные частоты значения выборки.

x_1	x_2	…	x_k
n_1	n_2	…	n_k
$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_k}{n}$	…….	$\frac{n_k}{n}$

Пример

Дана выборка: 3, 8, -1,3, 0, 5, 3, -1, 3, 5.

Построить вариационный и статистический ряды.

Запишем данную выборку в виде вариационного ряда:-1, -1, 0, 3, 3, 3, 3, 5, 5, 8.

Статистический ряд будет иметь вид:

x_1	-1	0	3	5	8
n_1	2	1	4	2	1
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

Выборочные характеристики.

В математической статистике вводятся числовые характеристики выборки аналогично числовым характеристикам случайных величин в теории вероятности.

Пусть имеется выборка, объёма n: $x_1, x_2, x_{3,\dots,} x_n$.

Выборочным математическим ожиданием (выборочным средним) называют среднее арифметическое значение выборки:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Если выборка задана статистическим рядом, то:

$$x = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + \dots + n_n x_n}{n}$$

Выборочной дисперсией называют среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочного среднего.

$$S_0 = \frac{(x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + (x_3 - x)^2 + \dots (x_n - x)^2}{n}$$

Если выборка задана статистическим рядом, то:

$$S_0 = \frac{n_1(x_1 - x)^2 + n_2(x_2 - x)^2 + n_3(x_3 - x)^2 + \dots + n_k(x_k - x)^2}{n}$$

Несмещенная выборочная дисперсия:

$$S = \frac{n}{n-1} S_0$$

Пример Дана выборка 1,2,3,4,5. Найти выборочное среднее x, выборочную дисперсию S_0, несмещенную выборочную дисперсию S. Объём выборки n= 5

$$X = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$S_0 = \frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{5} = \frac{4+1+1+4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$S = \frac{5}{5-1} \cdot 2 = 2{,}5$$

Характеристики положения

Данные характеристики необходимы для определения среднего уровня изучаемого количественного прзнака (средний уровень белка крови, средний вес пациентов, среднее время наступления наркоза и т.д.). Они характеризуют всю статистическую совокупность по одному признаку.

Мода (M_0) – это наиболее часто встречающаяся варианта в данной совокупности. Это такое значение варианты, что предшествующее и следующее за ним значения имеют меньшие частоты встречаемости. Например, для распределения:

X_i	16	17	18	20
n_i	5	1	20	6

Мода равна 18

Если в вариационном ряду нет повторяющихся значений, то говорят, что мода отсутствует. Если несколько значений повторяются одинаковое количество раз, то в качестве моды берут наименьшее из них.

Медиана Me – это значение признака, относительно которого ряд распределения делится на две равные по объему части. Например, в распределении: 12,14,16,18,20,22,24,26,28 медианой будет центральная варианта, т.е. M_e=20, т.к. по обе стороны от нее отстоит по 4 варианты.

Если **нечётное** количество - средняя варианта в сгруппированном ряде данных

2, 2, 3, **7**, 7,7, 8 (медиана **7**)

Для ряда с четным числом членов 6, 8, 10,12,14,16,18,20,22,24 медианой будет полусумма его центральных членов, т.е.

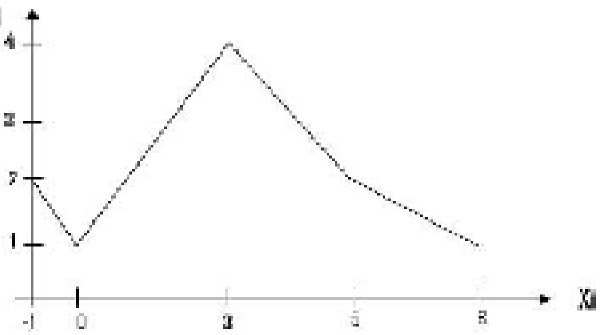
$$Me = \frac{14+16}{2} = 15$$

Для ряда: 4, 5, 5, 5, 7, 8, 9, 9 Медиана: $Me = \frac{5+7}{2} = 6$.

Среднеарифметическим значением вариационного ряда называется результат деления суммы значений статистической переменной на число этих значений, то есть на число слагаемых. Правило нахождения среднеарифметического значения выборки: каждую варианту умножить на её частоту (кратность); сложить все полученные произведения; поделить найденную сумму на сумму всех частот.

Графические изображения выборки. Полигон и гистограмма.

Для наглядного представления выборки часто используют различные графические изображения. Простейшими графическими изображениями выборки являются полигон и гистограмма выборки. Пусть выборка задана статистическим рядом: (x_1, n_1), (x_2, n_2), (x_k, n_k). *Полигоном выборки (графическое изображение дискретного ряда распределения)* называется ломаная линия, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_i, n_i).



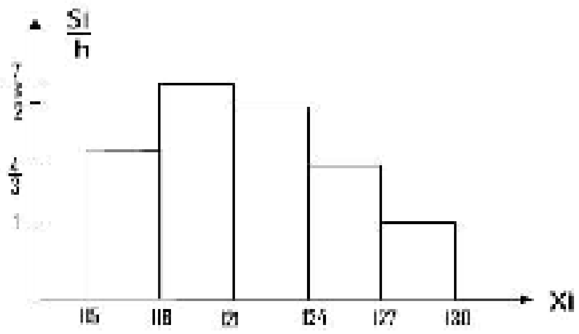
При большом объеме выборки, более наглядное представление даст *гистограмма выборки (графическое изображение интервального ряда распределения). Гистограмма* — это ступенчатая фигура, состоящая из смежных прямоугольников, построенных на одной прямой, основания которых одинаковы и равны ширине класса, а высота равна или частоте попадания в интервал n_i или относительной частоте $\frac{n_i}{n}$. Для построения гистограммы частот выборки промежуток от наименьшего значения выборки до наибольшего ее значения разбивается на несколько частичных промежутков h. Для каждого частичного промежутка подсчитывают сумму S_k (частот значений выборки, попавшей в этот промежуток.) Затем на каждом интервале, как на основании, строится прямоугольник высотой равной $\frac{S_k}{h}$.

Пример. В результате измерения роста детей получена выборка:118, 121, 115, 125, 125, 117, 124, 120, 120, 119, 121, 119, 122, 127, 118, 120, 123, 116, 124, 127, 120, 122

Построить гистограмму, если число частичных промежутков равно 5.

Наименьшее значение выборки: 115. Наибольшее значение выборки: 130.

$h = \frac{130-115}{5} = 3$ Число попаданий выборки в частичные промежутки соответственно равны: [115, 118) - 4, [118, 121) - 7, [121, 124) - 6, [124, 127) - 4, [127, 130) - 3. Соответственно высоты прямоугольников $\frac{S_k}{h}$ равны: $\frac{4}{7}, \frac{7}{3}, \frac{6}{3} = 2, \frac{4}{3}, \frac{3}{3} = 1$.



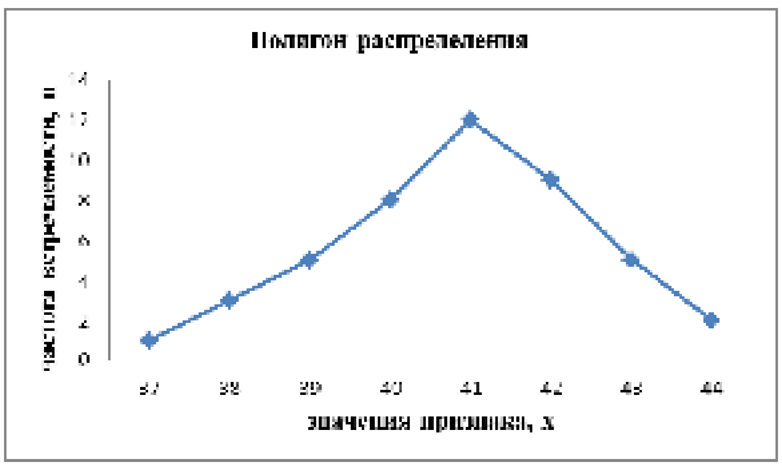
Пример Построить дискретный вариационный ряд и начертить полигон распределения 45 абитуриентов по числу баллов, полученных ими на приемных экзаменах:

39 41 40 42 41 40 42 44 40 43 42 41 43 39 42 41 42 39 41 37 43 41 38 43 42 41 40 41 38 44 40 39 41 40 42 40 41 42 40 43 38 39 41 42 41.

Решение: Для построения вариационного ряда различные значения признака *x* располагаем в порядке их возрастания и под каждым из этих значений записываем его частоту.

x_i	37	38	39	40	41	42	43	44
n_i	1	3	5	8	12	9	5	2

Построим полигон этого распределения:



Упражнения для самостоятельного решения

1. В результате испытания случайная величина X приняла следующие значения: 2, 6, 8, 4, 2, 5, 7, 6, 4, 4, 1, 5, 7, 6, 3, 1, 3, 5, 5, 3. Построить дискретный вариационный ряд и начертить полигон распределения.

2. В результате испытания случайная величина X приняла следующие значения: 11, 13, 18, 22, 24, 12, 23, 15, 18, 17, 12, 18, 19, 20, 12, 22, 16, 17, 14, 20, 21, 25, 27, 19.

Построить дискретный вариационный ряд с равными интервалами и начертить гистограмму.

Дан вариационный ряд: 3, 6, 6, 8, 8, 12, 12, 12, 25, 25, 70, 75.

Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию.

3. Значение случайной величины X представлены в виде статистического распределения

Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию.

Значения X	Частота	Значения X	Частота
120 – 140	1	200 – 220	53
140 – 160	6	220 – 240	24
160 – 180	19	240 – 260	16
180 – 200	58	260 – 280	3

4.Пять измерений некоторой величины дали следующие результаты: 92, 94, 103, 105, 106. Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию.

5. Представить в виде статистического ряда данные о количестве больных и построить полигон частот: 6, 5, 7, 8, 7, 9, 6, 10, 9, 9, 6, 10, 8, 5, 9, 8, 7, 5, 8, 10, 11, 10, 10, 8, 9, 6, 9, 7, 12, 9, 11, 8, 11, 7, 6, 8, 9, 8, 9, 5, 11, 9, 7, 9, 8, 8, 6, 12, 12, 7.

6. Построить полигон частот и относительных частот по распределению выборки:

X	2	3	5	6
n	10	15	5	20

7. Построить гистограмму изменения кровяного давления у 200 женщин в возрасте 60-65 лет по данным статистического распределения:

X,мм.рт.Ст.	S	X, мм. рт. ст.	S	X,мм.рт.ст.	S
70-80	1	100-110	17	130-140	57
80-90	1	110-120	36	140-150	30
90-100	5	120-130	42	150-160	11

8.При подсчете количества листьев у одного из лекарственных растений были получены, следующие данные: 8, 10, 7, 9, 11, 6, 9, 8, 10, 7. Вычислить выборочное среднее, выборочную дисперсию и несмещенную выборочную дисперсию.

9.В результате 10 измерений диаметра капилляра в стенке легочных альвеол были получены следующие данные: 2,83 мкм; 2,82; 2,81, 2,85; 2,87; 2,86; 2,83; 2,85; 2,83, 2,84 мкм. Вычислить выборочное среднее, выборочную дисперсию и несмещенную выборочную дисперсию.

10. При определении микроаналитическим способом содержания азота в данной пробе были получены следующие результаты: 9,29%; 9,38%; 9,35; 9,43; 9,53; 9,48; 9,61; 9,68. Вычислить выборочное среднее, выборочную дисперсию, несмещенную выборочную дисперсию.
11. В результате 10 одинаковых проб были получены следующие значения содержания марганца (%): 0,69; 0,70; 0,67; 0,66; 0,67; 0,68; 0,67; 0,68; 0,69; 0,68. Вычислить выборочное среднее, выборочную дисперсию, несмещенную выборочную дисперсию.

Оценка параметров генеральной совокупности по ее выборке.

Характеристики нормального закона распределения M(X), D(X) и σ(X) для генеральной совокупности представляют собой постоянные величины или параметры. По отношению к ним соответствующие выборочные характеристики $X_в$, $S_в^2$ и $S_в$ - являются оценками генеральных параметров, т.е. приближенными значениями генеральной совокупности.

Оценкой параметров генеральной совокупности называют всякую однозначно определенную функцию результатов наблюдений, с помощью которой судят о значении параметра.

Оценки подразделяются на точечные и интервальные. Точечной называют оценку которая определяется одним числом. Основными свойствами оценки являются: *несмещенность, эффективность и состоятельность.*

Точную оценку ѳ* параметра называют *несмещенной,* если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру ѳ, т.е. M(ѳ*) = ѳ

Требование несмещенности гарантирует отсутствие систематических ошибок при оценке параметров.

Так как оценка ѳ* – случайная величина, значение которой меняется от выборки к выборке, то величину отклонения от истинного значения параметров ѳ можно охарактеризовать дисперсией D(ѳ*).

Несмещенную оценку ѳ*, которая имеет наименьшую дисперсию среди все возможных несмещенных оценок параметра ѳ, вычисленных по выборкам одного и того же объема, называют эффективной оценкой.

Оценку ѳ* параметра ѳ называют *состоятельной*, если при увеличении числа независимых наблюдений (n→∞) с вероятностью, близкой к единице, можно утверждать, что разность между ѳ* и ѳ по абсолютной величине меньше сколь угодно малого положительного числа ε,

или $$\lim_{n\to\infty} P(\left| \theta * -\theta \right| \prec \varepsilon) = 1$$

Рассмотрим, какие выборочные характеристики лучше всего оценивают математическое ожидание и дисперсию.

Если из генеральной совокупности взять k независимых выборок одинакового объема, то вычисленные по этим данным выборочные средние $\overline{x_{b_1}}$; $\overline{x_{b_1}}$; …. $\overline{x_{b_k}}$ будут распределены по нормальному закону, а их математическое ожидание будет равно математическому ожиданию генеральной совокупности: M ($\overline{X_b}$) = M (X)

Таким образом, выборочное среднее $\overline{x_b}$ является несмещенной оценкой математического ожидания генеральной совокупности. При увеличении объема выборки (n→∞) значение выборочного среднего стремится к параметру генеральной совокупности с вероятностью, близкой к единице, т.е. данная оценка является состоятельной. Касаясь эффективности оценки, приведем без доказательства важный для практики вывод. Если случайная величина X распределена по нормальному закону, то несмещенная оценка математического ожидания имеет минимальную дисперсию, равную:

$$D(\overline{x_b}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Таким образом, оценкой математического ожидания служит выборочная средняя:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

где x - значение выборочных данных; n – объем выборки. Если данные представлены в виде вариационного ряда, то: $$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i m_i$$

где x- варианта выборки; m – частота встречаемости варианты x; k – число классов.

Ранее по аналогии с дисперсией генеральной совокупности, была введена выборочная дисперсия:

$$S_b^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x_b}\right)^2$$

где n – объем выборки.

Можно показать, что для k независимых и равных выборок из генеральной совокупности математическое ожидание их дисперсий отлично от дисперсий генеральной совокупности:

$$M\left(S_b^2\right) = \frac{n-1}{n} D(X),$$

т.е. данная оценка дисперсии является смещенной. Для получения не смещенной точечной оценки дисперсии генеральной совокупности необходимо использовать формулу:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$$

Для вариационного ряда:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 m_i$$

Оценку называют *исправленной выборочной дисперсией*. Однако эта поправка существенна при малых значениях n , при n > 50 практически нет разницы между оценками S^2 и $S_b^{\ 2}$. Можно показать, что оценки S^2 и $S_b^{\ 2}$ являются состоятельными оценками D(X).

Выборочной оценкой среднего квадратического отклонения будет:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x_b}\right)^2}$$

С учетом полученной оценки генеральной дисперсии, выражение для дисперсии выборочной средней равно: $D(\overline{x}) = \dfrac{S^2}{n}$

Тогда оценка среднего квадратического отклонения выборочной средней, или ошибка выборочной средней равна:

$$m_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{S^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

Пример

Имеется выборка 2, 4, 5, 3, 6, 4. Найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию и ошибку выборочной средней.

Решение.

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{2+4+5+3+6+4}{6} = 4$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = \frac{(2-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (3-4)^2 + (6-4)^2 + (4-4)^2}{6-1} = 2$$

$$m_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{S^2}{n}} = \sqrt{\frac{2}{10}} = 0{,}45$$

Пример Из генеральной совокупности извлечена выборка:

x_i	4	5	6	7
m_i	10	12	6	2

Найти оценки математического ожидания и дисперсии.

Решение.

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i m_i = \frac{4\cdot 10 + 5\cdot 12 + 6\cdot 6 + 7\cdot 2}{30} = 5,$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 m_i = \frac{(4-5)^2\cdot 10 + (5-5)^2\cdot 12 + (6-5)^2\cdot 6 + (7-5)^2\cdot 2}{30-1} = \frac{24}{29} \approx 0.83$$

Интервальная оценка. Доверительный интервал и доверительная вероятность

В некоторых случаях представляет интерес не получение точечной оценки неизвестного параметра генеральной совокупности, а определение некоторого интервала, в котором может находиться этот параметр с заданной вероятностью. Интервальное оценивание более эффективно при малом числе наблюдений, когда точечная оценка малонадежна.

Доверительным интервалом (a,b) для параметра ɵ называется такой интервал, относительно которого можно с заранее выбранной вероятностью P, близкой к единице, утверждать что он содержит неизвестное значение ɵ.

Доверительный интервал как бы «накрывает» содержащийся в нем неизвестный параметр и гарантирует, с какой вероятностью оцениваемый параметр будет находиться внутри этого интервала. Вероятность, с которой гарантируется попадание параметра генеральной совокупности внутрь доверительного интервала, называется *доверительной.* Чаще в качестве доверительной используются следующие уровни вероятности: $P_1 = 0{,}95$; $P_2 = 0{,}99$; $P_3 = 0{,}999$. Это означает, что параметр генеральной совокупности попадает в указанный интервал. В первом случае – в 95 случаях из 100, во втором – в 99 случаях из 100, а в третьем – в 999 случаях из 1000. Иногда указывается не доверительная вероятность, а вероятность обратных случаев, когда параметр не попадает в указанный интервал. Вероятность таких маловероятных случаев называется *уровнем значимости* α и равна: α = 1- P. Для нормального закона распределения, зная величину выборочной средней и ее ошибку, можно определить границы, в которых с той или иной вероятностью находится параметр генеральной совокупности – математическое ожидание. Эти границы называются доверительными и определяются по формуле: $\bar{x} - m_{\bar{x}} \cdot t_{\alpha,f} \le M(X) \le \bar{x} + m_{\bar{x}} \cdot t_{\alpha,f}$.

Или $\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{\alpha,f} \le M(X) \le \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{\alpha,f}$, где $t_{\alpha,f}$ – величина нормированного отклонения, определяемая по таблицам отклонения Стьюдента. Величина $t_{\alpha,f}$ определяется вероятностью попадания генерального параметра в указанный интервал и числом степеней свободы $f = n - 1$, где n – объем выборки.

Так, при n = 30 , f =30 – 1 = 29 для P =0,95, $t_{0.05,29} = 2.05$; для P=0,99, $t_{0.01,29} = 2.76$; для P = 0,999, $t_{0.001,29} = 3.66$. Из приведенных данных видно, что с увеличением доверительной вероятности границы интервала раздвигаются, т.е. увеличивается надежность попадания параметра в указанный интервал, но уменьшается точность его определения. И, наоборот, чем меньше вероятность, тем точнее оценка, однако увеличивается возможность промаха. С увеличением объема выборки *n* длина интервала уменьшается. Поэтому для сохранения высокой доверительной вероятности и повышения точности доверительной оценки необходимо увеличить объем выборки. Обычно при определении доверительного интервала исходят из заданной величины. Если задан объем выборки, то подбирают соответствующую доверительную вероятность и наоборот, если задана доверительная вероятность, то определяют необходимый объем выборки.

Пример: для данных предыдущего примера найти доверительный интервал математического ожидания с вероятностью 0,95. *Решение.* $\bar{x}-\frac{S}{\sqrt{n}}\cdot t_{\alpha,f}\le M(X)\le \bar{x}+\frac{S}{\sqrt{n}}\cdot t_{\alpha,f}$ Из решения предыдущего примера имеем: $\bar{x}=2; m_{\bar{x}}=0.45; f=n-1=6-1=5.$ В таблице Стьюдента найдем: $t_{0.95;5}=2.571$. Тогда: $2-0.45\cdot 2.571\le M(x)\le 2+0.45\cdot 2.571 \quad 0.83\le M(x)\le 3.157$.

Упражнения для самостоятельного решения.

1. Из генеральной совокупности извлечена выборка объемом n = 50.

xi	2	5	7	10
mi	16	12	8	14

Найти оценки математического ожидания и генеральной дисперсии.

2. Из общего числа студентов выборочно измерили рост у 81 мужчины. Средний рост оказался равным 171 см с дисперсией S^2 = 64см². определить ошибку выборочной средней и коэффициент вариации.

3. Признак X генеральной совокупности распределен нормально. Данные выборки имеют следующее статистическое распределение:

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
m_i	2	4	7	6	1

Найти выборочную среднюю ***x*** и выборочное среднее квадратическое отклонение *S*.

4. Количественный признак X распределен нормально. По выборке объемом 18 найдено выборочное среднее значение 21,5 и среднее квадратическое отклонение S = 0,9.
   Найти коэффициент вариации, ошибку выборочной средней и доверительный интервал для математического ожидания при уровне значимости $\alpha \le 0,05$.

5.Построить доверительный интервал с уровнем значимости $\alpha \le 0,01$ для дисперсии случайной величины X, имеющей нормальный закон распределения, если S^2 = 30, n=40.

6.Изучали воздействие определенной физиопроцедуры на частоту сердечных сокращений в группе испытуемых. Объем выборки 18. По данным статистической обработки имеем:

Границы интервалов (уд/мин)	67 – 68,2	68,2 – 69,4	69,4 – 70,6	70,6 – 71,8	71,8 – 73
Относительная частота	0,05	0,16	0,44	0,22	0,05

Выборочная средняя x=70,16; выборочное среднее квадратическое отклонение S = 1,2. Построить гистограмму и определить доверительный интервал для математического ожидания с уровнем значимости $\alpha \le 0,05$.

Пример

Изучали воздействие нового препарата на массу тела лабораторных мышей. Массы в граммах оказались равными: 64, 69, 83, 80, 70, 74, 75, 77, 77. Объем выборки n=9.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ, частота:
64-68,75	0,12
68,75-73,50	0,22
73,50-78,25	0,44
78,25-83	0,22

Математическое ожидание $\overline{X}$ =74,08.

Определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере. Результаты округляйте до тысячных. Постройте гистограмму распределения частот.

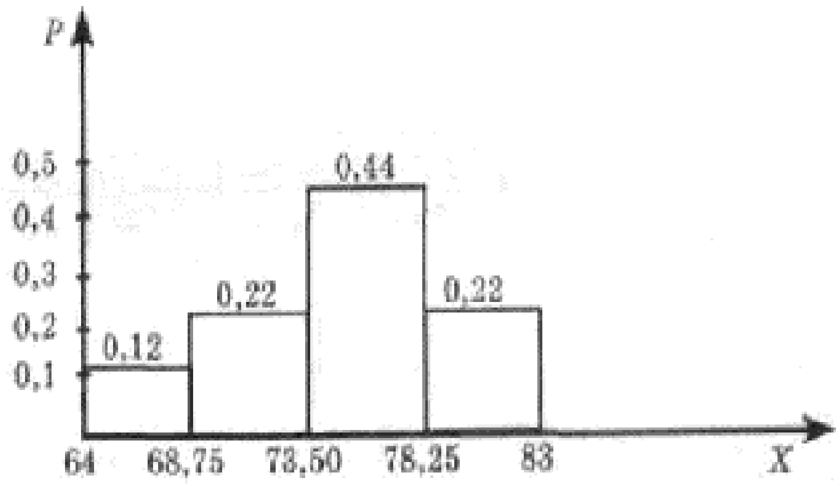
Решение: Поместим результаты вычислений в таблицу:

Номер интервала	Границы интервала	Середина интервала	Относительная частота	x_ip_i
1.	64-68,75	66,375	0,12	7,965
2.	68,75-73,50	71,125	0,22	15,648
3.	73,50-78,25	75,875	0,44	33,385
4.	78,25-83	80,625	0,22	17,738

Математическое ожидание находим по формуле

$\overline{X} = M(X) = X_1P_1 + X_2\,P_2 + \ldots + X_i\,P_i = \sum X_i\,P_i = 7{,}965+15{,}648+33{,}385+17{,}738=74{,}736$

Математическое ожидание, найденное на компьютере, точно не совпадает по значению с тем, которое найдено по формуле, но приблизительно равно. Небольшие неточности допускаются вследствие округления большого количества чисел. Построим гистограмму распределения частот, откладывая по оси абсцисс ширину интервала, а по оси ординат — относительную частоту встречаемости.



Упражнения для самостоятельного решения

Вариант 1.

Изучали среднее артериальное давление в начальной стадии шока (мм рт. ст.). Объем выборки n=15.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ, частота:
89-94	. 0,06
94-99	0,34
99-104	0,4
104-109	0,2

Математическое ожидание $\overline{X}$ = 99,86. Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 2.

Изучали среднее артериальное давление в конечной стадии шока (мм рт. ст.). Объем выборки n = 15.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ, частота:
51-57	0,14
57-63	0,4
63-69	0,26
69-75	0,2

Математическое ожидание $\overline{X}$ = 63,46. Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 3.

Изучали рост мужчин 25 лет (см) для городской местности.

Объем выборки n = 19.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ, частота:
160-164	0,1
164-168	0,15
168-172	0,37
172-176	0,28
176-180	0,1

Математическое ожидание $\overline{X}$ =170,15. Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 4.

Изучали среднюю длительность пребывания больного на койке в стационаре (в ч).

Объем выборки n = 21.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ, частота:
161-165	0,06
165-169	0,19
169-173	0,47
173-177	0,19
177-181	0,09

Математическое ожидание $\overline{X}$ =171,42.

Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 5.

Изучали воздействие определенной физиопроцедуры на частоту сердечных сокращений (уд./мин) у группы испытуемых. Объем выборки n = 18.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ, частота:
67-68,2	0,09
68,2-69,4	0,16
69,4-70,6	0,44
70,6-71,8	0,22
71,8-73	0,09

Математическое ожидание $\overline{X}$ =70,16.

Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 6.

Изучали среднее артериальное давление в послеинфарктном состоянии (мм рт.ст.). Объем выборки n = 23. Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ, частота:
59-70	0,17
70-81	0,26
81-92	0,24
92-103	0,20
103-114	0,13

Математическое ожидание $\overline{X}$ =85,04.

Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 7.

Изучали среднее артериальное давление у больных с пониженным гемоглобином в крови (мм рт. ст.). Объем выборки n = 23.Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ, частота:
60-70	0,11
70-80	0,21
80-90	0,14
90-100	0,20
100-110	0,13
110-120	0,21

Математическое ожидание $\overline{X}$ =90,04.

Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 8.

Изучали охват диспансерным наблюдением у населения по годам. Объем выборки n = 9.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ, частота:
30-40	0,12
40-50	0,32
50-60	0,42
60-70	0,14

Математическое ожидание $\overline{X}$ = 50,80.

Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 9.
Изучали систолическое давление в начальной стадии шока (мм рт. ст.) у людей, оставшихся в живых. Объем выборки n = 21.
Провели статистическую обработку данных.
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ, частота:
93-105	0,07
105-117	0,28
117-129	0,33
129-141	0,23
141-153	0,09

Математическое ожидание $\overline{X}$ = 123,95.
Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 10.
Изучали систолическое давление в начальной стадии шока (мм рт. ст.) у людей, умерших после шока. Объем выборки n = 12.
Провели статистическую обработку данных.
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ, частота:
79-90	0,16
90-101	0,26
101-112	0,33
112-123	0,25

Математическое ожидание $\overline{X}$ =101,83.
Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 11
Изучали среднее артериальное давление в начальной стадии шока (мм рт. ст.). Объем выборки n=15.
Провели статистическую обработку данных.
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ, частота:
89-94	. 0,06
94-99	0,34
99-104	0,4
104-109	0,2

Математическое ожидание $\overline{X}$ = 99,86.
Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 12.
Изучали среднее артериальное давление в конечной стадии шока (мм рт. ст.). Объем выборки n = 15.
Провели статистическую обработку данных.
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ, частота:
51-57	0,14
57-63	0,4
63-69	0,26
69-75	0,2

Математическое ожидание $\overline{X}$= 63,46. Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

МЕДИЦИНСКАЯ (САНИТАРНАЯ) СТАТИСТИКА.

Задачи и разделы медицинской статистики.

Интенсификация труда медицинских работников требует систематического учета и анализа лечебно-профилактической, противоэпидемической работы. В связи с этим возрастает роль и значимость медицинской статистики в научной и практической работе. Умелое использование медицинской статистики позволяет своевременно «ставить диагноз» общественному здоровью и эффективности проводимых лечебно-профилактических мероприятий. Успех любого статистического исследования определяется не только знанием сущности изучаемого вопроса, но и методических основ медицинской статистики.

Медицинская (санитарная) статистика изучает вопросы, связанные с медициной и здравоохранением. Санитарная статистика делится на два раздела:

- статистику здоровья (количественная характеристика состояния здоровья различных групп населения в зависимости от комплекса социально-биологических факторов);
- статистику здравоохранения (состояние сети кадров, оценка деятельности учреждений здравоохранения, мероприятий по охране здоровья населения).

Руководство медицинской статистикой в стране осуществляет Управление медицинской статистики и вычислительной техники Министерства здравоохранения.

Санитарная статистика играет важную роль в оценке состояния здоровья населения, деятельности медицинских учреждений, планировании и прогнозировании различных служб здравоохранения.

Этапы медико - статического исследования

1. Определение цели и задач исследования, исходя из рабочей гипотезы или предположения, составления плана и программы исследования
2. Организация и проведение сбора необходимых данных, группировка полученных материалов.
3. Статистическая обработка данных.
4. Анализ полученных результатов, выводы.

Первый этап является основным, т.к. правильный выбор цели определяет весь ход дальнейшего исследования, а также должен оправдывать затраты и время потраченное на достижение поставленной цели. Целью большинства медико–биологических исследований является выявление влияния различных *контролируемых факторов* на здоровье человека. Под контролируемым фактором понимаются различные внутренние или внешние причины, которые влияют на показатели здоровья населения и могут быть измерены в результате проводимого исследования. К факторам могут относится условия проживания, режим питания, концентрация вредных веществ, воздействие электромагнитных излучений, лекарственные вещества и т.п.

Задачи исследования конкретизируют вопросы, решение которых приведет к достижению поставленной цели.

План исследования определяет решение организационных вопросов проведения исследования. Основные из них: определение объема исследования, места и сроков проведения, выбор и обучение исполнителей, техническое и методическое обеспечение исследований, компьютерное и программное обеспечение автоматизации сбора и обработки данных. Программа исследований предусматривает выбор единиц наблюдения, составление программы сбора, выбора математических методов обработки и анализа данных.

Под *объемом наблюдения* понимается совокупность единиц наблюдений или предметов, которые необходимо изучить. Это то, что в математической статистике называется *статистической совокупностью.* Элементы входящие в статистическую совокупность называются *единицей наблюдения.* Если речь идет о здоровье населения, то единицей наблюдения будет конкретный испытуемый, а группа испытуемых – статистическая совокупность. При обследовании испытуемых производятся измерения и регистрация различных показателей, которые отражают нынешнее функциональное состояние обследуемого. Эти показатели называются *учетными признаками.*

Например, для оценки функционального состояния испытуемого измеряются температура, артериальное давление, частота импульса, частота дыхания и т.п.

Учитывая, что эти показатели могут отличатся как у разных испытуемых, так у одного испытуемого с течением времени, то эти учетные признаки относятся к случайным величинам.

Второй этап исследования заключается в организации и проведении сбора необходимого материала исследования. По способу сбора возможны следующие варианты получения первичной информации об обследуемом объекте: *непосредственное получение* данных, *выкопирка* информации из отчетно – учетно документации и *опрос* населения.

Непосредственное наблюдение связано с получением необходимых показателей с изучаемого объекта с помощью первичных преобразователей информации с дальнейшим их усилением и регистрацией.

Например: измерение биоэлектрической активности сердца, мозга, мышц; определение состава выдыхаемого воздуха; биохимический анализ жидкостей и т.п.

Непосредственно наблюдение чаще проводится с использованием технических средств, что позволяет автоматизировать процесс получения и обработки медико-биологической информации с помощью современных компьютерных систем.

Выкопировка данных основана на сборе информации из отчетно – учетной документации медицинских учреждений. К ним относятся: истории болезни; карта выбывшего из стационара; больничные листы и т.п. Работа с бумажными носителями требует много времени и весьма трудоемка, т.к. порой в первичных документах не всегда представлены необходимые сведения, а порой много излишней информации. Поэтому в последнее время много внимания уделяется стандартизации отчетной документации и перевода ее на электронные носители. Это связано с разработкой медицинских информационных систем, созданием электронных баз данных, электронных историй болезней, что значительно повышает оперативность получения необходимой информации, её полноту и достоверность.Объединение баз данных позволит получить необходимую информацию по любому вопросу в масштабах всего региона или даже всей страны. *Опрос* связан с получением информации от населения методом анкетирования, интервью или по переписи. Для этого необходимо использовать стандартизированные опросные листы, позволяющие в дальнейшем автоматизировать ввод информации в компьютерные системы для обработки и анализа полученных данных.

На *третьем этапе* исследования производится обработка полученных данных, которая включает последовательное выполнение следующих операций: контроль собранных данных, шифровка, группировка, сводка данных в статистические таблицы, статистическая обработка материала.

Контроль необходим для проверки правильности и полноты ответов на поставленные вопросы. Если необходимые данные отсутствуют в обследовании объекта, то их следует дополнить или исключить некачественное обследование из обработки.

Шифровка применяется для условного обозначения тех или иных признаков обследуемого объекта, для целей группировки.

Группировка связана с систематизацией первичного материала. Чаще всего под группировкой понимают разделение анализируемых данных на группы по тем или иным признакам.

Например, распределение больных по возрастным признакам или по полу.

Иногда группировка необходима для объединения мелких однородных групп в более крупные. После группировки составляются статистические таблицы, которые облегчают дальнейшую обработку данных. Статистическая обработка данных состоит в вычислении основных показателей характеризующих выборочную совокупность. При этом могут вычисляться *абсолютные*, *относительные* и *средние величины*. *Абсолютные показатели* несут информацию о значении того или иного признака и широко используются для характеристики процесса или явления.

Например, численность населения нашей страны, результаты дорожно-транспортного происшествия в год в целом по стране; число больных СПИДом в стране и т.п.

Сравнение ежегодных показателей позволяет выявить динамику этих данных и принять соответствующие меры по их улучшению. Но если речь идет о выборках различного объема, то сравнивать абсолютные показатели нельзя. Необходимо использовать *относительные величины*, которые получаются путем различных отношений и сопоставлений.

Например. Для сравнения успеваемости различных учебных групп, необходимо количество студентов получивших положительные оценки на экзаменах разделить на количество студентов в группе и сравнить эти относительные величины. Сравнение абсолютных показателей даст неверный результат.

Если относительная величина умножается 100, то показатель выражается в процентах (%), если умножается на 1000, то в промилле (‰), а если на 10000, то в продецимилле (‱).Иногда некоторые явления в медицине выражаются в абсолютных единицах на 1000, 10000 или 100000 населения.

Для получения информации о наиболее часто встречаемом значении исследуемой величины, необходимо находить выборочную среднюю по формуле:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i ,$$ где x_i – значение учетного признака, n – объем выборки.

Для оценки разброса или отклонения изучаемого учетного признака относительно его среднего значения находят выборочное среднеквадратическое отклонение по формуле

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2} .$$

Среднее квадратическое отклонение показывает границы колебания вариационного ряда. В математической статистике имеется правило "трех сигм", которое говорит, что для нормального закона распределения в интервале $M(x) \pm 3\sigma$ находится 99,7% всех вариант ряда, в интервале $M(x) \pm 2\sigma$ – 95,5% и $M(x) \pm \sigma$ – 68,1% вариант ряда. Зная значение выборочного среднего квадратического отклонения и объем выборки, находим ошибку выборочного среднего

$$m_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Тогда полученные значения выборочной средней можно представить в виде: $\bar{x} \pm m_{\bar{x}}$, что позволит оценить не только среднее значение исследуемой величины, но и её разброс относительного этого среднего значения.

Графические изображения в статистике.

Результаты статистического исследования обычно представляют в виде одного или нескольких рядов чисел, сведенных в статистические таблицы. Но для большей наглядности и лучшего усвоения эти же результаты можно представить в виде различных графических изображений. В медицинской практике графические изображения используются для иллюстрации статистических данных, характеризующих показатели здоровья и здравоохранения. Для наглядности представления полученных данных используется графическое изображение результатов анализа. В частности могут использоваться графики гистограмм и полигонов. Графические изображения, использующиеся для более наглядного изображения статистических данных, называются *диаграммами*. Наиболее часто используются следующие виды диаграмм: *линейные, столбиковые*, *секторные (круговые и полосовые) и фигурные.* В качестве вспомогательного средства для изображения территориальных различий и распространения изучаемого явления используются:

а) картограмма;

б) картодиаграмма.

Каждая диаграмма, к какому бы типу графических изображений она не относилась, должна иметь четкую надпись, объясняющую изображение. Шкалы на диаграмме должны быть снабжены указателями размеров. Числа рекомендуется надписывать на самой диаграмме или в прилагаемой к ней таблице. Все условные обозначения должны быть объяснены.

Линейные диаграммы. Применяются в случаях, когда необходимо показать динамику явления (изменение показателей во времени), например снижение заболеваемости населения инфекционными болезнями или динамику детской смертности. Строятся на прямоугольной системе координат. При помощи линейных диаграмм можно также изображать взаимозависимость двух и более явлений. Каждая линейная диаграмма должна быть подписана, четко изображены все точки диаграммы и соответствующие значения на осях абсцисс и ординат. Если на диаграмме изображается несколько однородных событий, то каждая линия должна отличать

Столбиковая диаграмма. Диаграммы, построенные по такому же принципу, как и линейные, но в которых вертикально или горизонтально проводимым линиям соответствуют прямоугольники, называются столбиковыми диаграммами. Эти диаграммы удобны при сравнении каких либо показателей в определенный промежуток времени. Столбиковые диаграммы бывают вертикальные и горизонтальные.

Секторные диаграммы. Секторные диаграммы применяется для изображения структуры явления, например, структуры заболеваемости с временной утратой трудоспособности или структуры причин смерти в соответствии со своим удельным весом. Бывают круговые и полосовые (горизонтальные и вертикальные). Секторные диаграммы круговые представляют собой круг (полосу), отдельные секторы которого соответствуют частям изображаемого явления. Такие диаграммы удобно применять для изображения распределения на составные части. В секторных круговых диаграммах секторы, располагаются в порядке их возрастания или убывания по движению часовой стрелки и различаются различной окраской или штриховкой.

Фигурные диаграммы. При использовании фигурных диаграмм линии, столбцы и т. д. заменяются одинаковыми схематическими рисунками людей, предметов и т.д. Например, рост числа коек в виде больничных коек, рост численности населения в виде человеческих фигурок. Каждая из них соответствует обозначенному условному числу людей или предметов, представленных на рисунке. Сравнение достигается тем, что для различных местностей (или периодов времени) изображается различное количество фигур в соответствии с полученными данными.

Картограммы и картодиаграммы – это графические изображения, нанесенные на схеме географической карты. Картограммы применяют тогда, когда хотят показать распространение явления на территории, при этом для изображения явления используют краску, штриховку. Картодиаграмма – изображение на схеме географической карты диаграмм различного вида.

Статистические таблицы.

На основе собранных статистических данных составляются статистические таблицы. Таблицы бывают 3-х видов: простые таблицы, групповые таблицы и комбинационные таблицы. Каждая таблица имеет: перечень характеризуемых в таблице объектов и перечень характеризующих объект признаков.

Каждая таблица должна иметь краткий заголовок, говорящий о её содержании. Внутри таблицы все графы (столбцы, строки) также должны иметь чёткие названия. При заполнении таблицы во все её графы проставляют числа, соответствующие числу наблюдений. Оставшиеся незаполненными по причине невозможности наблюдений графы прочеркиваются во избежание пропусков и для предупреждения записей в несоответствующие графы. В графах, не заполненных вследствие отсутствия сведений, ставится "н.с." или многоточие. После заполнения таблицы в нижнем горизонтальном или в последнем справа вертикальном столбце подводят итоги вертикальных и горизонтальных граф. Таблица, которая содержит перечень объектов, и кроме того имеет итоговую графу, носит название простой таблицы.

Число стационарных учреждений и коек на 10 тыс. жителей, по профилю стационара в России

	Число больниц	Число коек на 10 тыс. жителей
Центральные районные больницы	1778	27,8
Районные больницы	299	2,1
Участковые больницы	4522	9,0
Все стационарные учреждения	12272	127,6

Простые таблицы можно использовать для получения общей статистической информации. Для анализа они малопригодны, так как в них не отражены взаимосвязи признаков между собой. В групповой таблице объекты характеризуются по нескольким группам признаков.

Сведения о родившихся по возрасту матери и по очерёдности рождения (в % к общему числу родившихся)

Год	по возрасту матери					по очерёдности рождения					
	До 20 лет	20-29	30-39	40-49	всего	1	2	3	4	≥5	всего
2008	21,1	59,2	18,2	1,34	99,84	55,6	28,8	8,9	3,4	3,05	99,75
2009	21,4	60,8	16,5	1,23	99,93	58,7	28,5	8,0	2,6	2,05	99,85
2010	21,0	62,0	15,9	1,01	99,91	59,1	28,7	7,8	2,4	1,93	99,93
2011	20,0	62,9	16,1	0,96	99,96	60,1	27,8	7,6	2,5	1,94	99,94
2012	18,8	64,3	16,0	0,63	99,73	60,1	27,8	7,7	2,4	1,83	99,83

Сравнение объектов по одинаковым признакам осуществляется с помощью комбинационной таблицы.

Средние показатели работы службы анестезиологии

Вид анестезии	Количество анестезий					
	По городу			По области и городу		
	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Ингаляционный наркоз	1034	999	736	3821	4846	3431
Эндотрахеальный наркоз	4590	5365	4911	11669	12665	12639
Внутривенный наркоз	19836	25748	25200	44646	46177	45507
Проводниковая анестезия	290	331	266	1039	1950	1756
Всего анестезий	25460	32112	30847	60536	63688	61577

Работа стационара

АЛГОРИТМЫ РАСЧЕТА ОСНОВНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ОЦЕНКИ ЗДОРОВЬЯ НАСЕЛЕНИЯ И ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ЛПУ

№	*Название показателей*	*Алгоритм расчета показателей*	*Источник информации*
		Обеспеченность медицинскими кадрами	
1.	Обеспеченность врачами (на 10000 населения)	(Число врачей на конец года) х 10000 / Среднегодовая численность населения	Форма ГСН № 17, табл.1000; Росстат
2.	Обеспеченность средним медицинским персоналом (на 10000 населения)	(Число средних медработников на конец года) х 10000 / Среднегодовая численность населения	Форма ГСН №17, табл. № 1001; Росстат
3.	Коэффициент совместительства основных работников (%)	(Число должностей, занятых основными работниками) х100 / Число физических лиц основных работников	Форма ГСН № 30, табл. № 1100
4.	Укомплектованность ЛПУ медицинскими работниками (%)	(Число занятых должностей медицинских работников) х 100 / Число штатных должностей мед. работников	Форма ГСН № 30, табл. № 1100
5.	Укомплектованность городских участков (терапевтических, цеховых, педиатрических) врачами (%)	(Число занятых должностей врачей городских участков) х 100 / Число штатных должностей врачей городских участков	Форма ГСН № 30, табл. № 1100
6.	Доля врачей–специалистов и среднего медицинского персонала по отдельным специальностям в общей численности врачей и среднего медицинского персонала (%)	[Число врачей (среднего медицинского персонала) данной специальности] х 100 / Общее число врачей (среднего медперсонала)	Форма ГСН № 17, табл.1000, 1001
7.	Доля врачей (среднего медперсонала), имеющих сертификат специалиста (%)	[Число врачей (среднего медперсонала), имеющих сертификат специалиста] х 100 / Число врачей (среднего медперсонала) на конец года	Форма ГСН № 17, табл.1000, 1001
8.	Доля врачей (среднего медперсонала), имеющих квалификационную категорию, всего (%)	[Число врачей (среднего медперсонала), имеющих квалификационную категорию, всего] х 100 / Число врачей (среднего медперсонала) всего на конец года	Форма ГСН № 17, табл.1000, 1001
		Показатели работы поликлиники	
1.	Плановая мощность поликлиники	см. приложение	Форма ГСН №30, табл. № 1010
2.	Обеспеченность амбулаторно-	(Плановое число посещений в смену) х 10000	Форма ГСН № 30,

	поликлинической помощью на 10000 населения	Среднегодовая численность обслуживаемого населения	табл.1010, Росстат
3.	Динамика числа посещений поликлиники (в %)	(Число посещений врачей поликлиники в данном году) х 100 / Число посещений врачей поликлиники за предыдущий год	Форма ГСН № 30, табл.2100, 2700
5.	Доля посещений сельских жителей от числа всех посещений (в %)	(Число посещений врачей, сделанных сельскими жителями) х 100 / Число всех посещений врачей поликлиники	Форма ГСН № 30, табл.2100
6.	Доля посещений детей по поводу заболеваний в возрасте до 17 лет включительно (в %)	(Число посещений, сделанных детьми по поводу заболеваний в возрасте до 17 лет включительно) х 100 / Число всех посещений врачей поликлиники	Форма ГСН № 30, табл.2100, 2700
7.	Число посещений на 1 жителя в год	Число всех посещений / Среднегодовая численность населения	Форма ГСН №30, табл. №2100, 2700; Росстат
8.	Структура посещений (%)	[Число посещений (по поводу заболеваний, профилактических)] х 100 / Общее число посещений в поликлинику	Форма ГСН № 30, табл. № 2100
9.	Число посещений на 1 ФАП	Число посещений на ФАПы / число ФАПов	Форма ГСН №30, табл. № 2101, 1004
10.	Число посещений на 1 сельского жителя	Число посещений сельских жителей / Среднегодовая численность сельского населения	Форма ГСН № 30, табл. № 2100; Росстат
11.	Число посещений на 1 занятую должность врача-специалиста в год (функция врачебной должности)	Число посещений врача-специалиста поликлиники на приеме и на дому / Число занятых должностей врача-специалиста поликлиники	Форма ГСН № 30, табл. № 1100; 2100
	Заболеваемость, диспансеризация и инвалидность населения		
1.	Общая заболеваемость (частота распространения) населения (всего, детей, взрослых)	[Число всех зарегистрированных случаев заболеваний (всего, детей, взрослых)] х 1000 / Среднегодовая численность населения (всего, детей, взрослых)	Форма ГСН №12, табл. № 1000, 2000, 3000; Росстат
2.	Первичная заболеваемость населения (всего, детей, взрослых)	[Число зарегистрированных случаев заболеваний (всего, детей, взрослых) с диагнозом, установленным впервые в жизни] х 1000 / Среднегодовая численность населения (всего, детей, взрослых)	Форма ГСН №12, табл. №1000, 2000, 3000; Росстат
3.	Структура заболеваемости (общей, первичной) (%)	(Число случаев отдельных зарегистрированных заболеваний) х 100 / Общее число всех заболеваний	Форма ГСН №12, табл. №1000, 2000, 3000
	Заболеваемость с временной утратой трудоспособности		
4.1	Число случаев	(Число случаев временной	Форма ГСН

	нетрудоспособности на 100 работающих	Нетрудоспособности) х 100 / Число работающих	№ 16-ВН, табл. № 1000
4.2	Число дней нетрудоспособности на 100 работающих	(Число дней временной нетрудоспособности) х 100 / Число работающих	Форма ГСН № 16-ВН, табл. № 1000
4.3	Средняя продолжительность одного случая заболевания	Число дней временной нетрудоспособности / Число случаев временной нетрудоспособности	Форма ГСН № 16-ВН, табл. № 1000
4.4	Структура заболеваемости с временной утратой трудоспособности (в % по случаям и дням)	[Число случаев (дней) утраты трудоспособности по поводу данного заболевания] х 100 / число случаев (дней) утраты трудоспособности по поводу всех заболеваний	Форма ГСН № 16-ВН, табл.1000
Диспансеризация населения			
5.1.	Показатель охвата диспансерным наблюдением	(Число лиц, состоящих под диспансерным наблюдением на конец года) х 1000 / Численность населения на конец отчетного года	Форма ГСН №12, табл. №1000, 2000, 3000; Росстат
5.2	Специальные показатели охвата диспансерным наблюдением по отдельным заболеваниям	(Число лиц, состоящих под диспансерным наблюдением по данному заболеванию на конец года) х 1000 / Численность населения на конец отчетного года	Форма ГСН №12, табл. №1000, 2000, 3000
Стойкая утрата трудоспособности (инвалидность)			
6.1	Показатель первичного выхода на инвалидность	(Число больных, впервые признанными инвалидами) х 10000 / Среднегодовая численность населения	Форма ГСН № 7 (собес) МСЭК; Росстат
6.2	Показатель детской инвалидности	(Количество детей-инвалидов в возрасте 0-17 лет) х 1000 / Среднегодовая численность детей в возрасте 0-17 лет	Форма ГСН № 19, табл. 1000; Росстат
Профилактические медицинские осмотры населения			
1.	Охват отдельных групп населения медицинскими осмотрами (%)	(Число осмотренных лиц) х 100 / Число подлежащих медицинским осмотрам	Форма ГСН № 30, табл. № 2510
2.	Частота выявленных заболеваний при профилактических медицинских осмотрах (‰)	(Число заболеваний) х 1000 / Число осмотренных лиц	Талон амбулаторного пациента
Стоматологическая помощь			
1.	Число посещений на 1 жителя в год	Число всех посещений / Среднегодовая численность населения	Форма ГСН № 30, табл. № 2700; Росстат
2.	Удельный вес первичных посещений (в %)	(Число первичных посещений) х 100 / Число всех посещений	Форма ГСН № 30, табл. № 2700
3.	Удельный вес лиц,	(Число лиц, нуждающихся в санации) х	Форма ГСН

	нуждавшихся в санации (%)	100 Число осмотренных лиц	№ 30, табл. № 2700
4.	Число санированных лиц (%о)	(Всего санировано) х 1000 Среднегодовая численность населения	Форма ГСН № 30, табл. № 2700
Показатели службы скорой медицинской помощи			
1.	Число обращений на 1000 населения	(Всего выполнено выездов + безрезультатные выезды) х 1000 Среднегодовая численность населения	Форма ГСН № 40, табл. 2100, 2101 Росстат
2.	Число безрезультатных выездов на 1000 населения	(Всего безрезультатных выездов) х 1000 Среднегодовая численность населения	Форма ГСН № 40 табл. 2101; Росстат
3.	Доля числа лиц, которым оказана амбулаторная помощь (в %)	(Число лиц, которым оказана амбулаторная помощь) х 100 (Число лиц, которым оказана помощь при выездах + число лиц, которым оказана амбулаторная помощь)	Форма ГСН № 40 табл. 2101; 2300
4.	Выполнено вызовов по поводу несчастных случаев на 1000 населения	(Число вызовов по поводу несчастных случаев) х 1000 Среднегодовая численность населения	Форма ГСН № 40 табл. 2100, 2101; Росстат
5.	Выполнено вызовов по поводу внезапных заболеваний (%о)	(Число вызовов по поводу внезапных заболеваний) х 1000 Среднегодовая численность населения	Форма ГСН № 40 табл. 2100, 2101; Росстат
6.	Удельный вес госпитализированных больных (в %)	(Число госпитализированных больных) х 100 Число лиц, которым оказана помощь при выездах	**Форма ГСН № 40, табл.2100**
Деятельность стационара. Коечный фонд и его использование (без коек сестринского ухода)			
1.	Обеспеченность койками (на 10 000 населения)	(Число коек, развернутых на конец года) х 10000 Численность населения на конец года	Форма ГСН № 30, табл. № 3100; Росстат
2.	Показатель использования пропускной способности (%)	(Число койко-дней, проведенных больными) х 100 (Число дней в отчетном году х среднегодовое число коек)	Форма ГСН № 30, табл. № 3100
3.	Средняя занятость койки в году	Число койко-дней, проведенных больными Среднегодовое число коек	Форма ГСН № 30, табл. № 3100
4.	Число пользованных больных	(Число поступивших + число выбывших + + число умерших больных) 2	Форма ГСН № 30, табл. № 3100
5.	Средняя длительность пребывания больного на койке	Число койко-дней, проведенных больными Число пользованных больных	Форма ГСН № 30, табл. № 3100
6.	Средняя длительность	Число койко-дней, проведенных	Форма ГСН

	лечения по нозологиям	больными (выписанными, умершими) / Число больных (выписанных, умерших) с данным заболеванием	№ 14, табл. № 2000
7.	Оборот койки	Число пользованных больных / Среднегодовое число коек	Форма ГСН № 30, табл. № 3100
8.	Среднее время простоя койки (общее)	(Число дней работы койки в году – средняя занятость койки) / Оборот койки	Форма ГСН № 30, табл. № 3100
9.	Уровень(частота) госпитализации	(Число госпитализированных больных) х 100 / Среднегодовая численность населения	Форма ГСН № 30, табл. № 3100; Росстат
10.	Летальность больничная (в %)	(Число умерших всего) х 100 / Число выбывших больных (выписанные + умершие)	Форма ГСН № 30, табл. № 3100
11.	Летальность больничная от отдельных заболеваний (в %)	Число умерших от отдельных заболеваний х 100 / Число выбывших больных с данным заболеванием (выписанные + умершие)	Форма ГСН № 14, табл. № 2000
12.	Показатель выполнения плана койко-дней (в %)	Число койко-дней, проведенных больными в стационаре х 100 / Плановое количество койко-дней	Форма ГСН № 30, табл. № 3100; финансовый план
	Хирургическая работа стационара		
1.	Хирургическая активность (в %)	(Число оперированных больных) х 100 / Число больных, выбывших с коек хирургического профиля	Форма ГСН № 14, табл. № 4000; форма № 30, табл. 3100
2.	Структура оперативных вмешательств (в %)	(Число произведенных отдельных видов операций) х 100 / Число операций всего	Форма ГСН № 14, табл. № 4000
3.	Послеоперационная летальность (в %)	(Число умерших всего от операций) х 100 / Число оперированных больных	Форма ГСН № 14, табл. № 4000
4.	Структура послеоперационной летальности (в %)	(Число умерших от отдельных видов операций) х 100 / Число оперированных больных при данных видах операций	Форма ГСН № 14, табл. № 4000
	Экстренная хирургическая помощь		
1.	Показатель поздней госпитализации больных для оказания экстренной хирургической помощи (в %)	(Число больных, доставленных для оказания экстренной хирургической помощи с отдельными заболеваниями, позднее 24 часов от начала заболевания) х 100 / Число больных, доставленных для	Форма ГСН № 30, табл. № 3600

		оказания экстренной хирургической помощи с данным заболеванием, всего	
2.	Доля оперированных больных из числа доставленных для оказания экстренной хирургической помощи (в %)	(Число оперированных больных) х 100 Число больных, доставленных для оказания экстренной хирургической помощи	Форма ГСН № 30, табл. № 3600
3.	Летальность не оперированных больных (в %)	(Число умерших не оперированных) х 100 Число не оперированных больных	Форма ГСН № 30, табл.№ 3600
4.	Летальность оперированных больных, доставленных по экстренным хирургическим показаниям (в %)	(Число умерших оперированных больных, доставленных по экстренным хирургическим показаниям) х 100 Общее число оперированных больных по экстренным хирургическим показаниям	Форма ГСН №30, табл.№ 3600
5.	Удельный вес опери-рованных по экстренным хирургическим показаниям (%)	(Число оперированных больных по экстренным показаниям) х 100 Всего оперированных больных в стационаре	Форма ГСН № 30, табл.3600, Форма ГСН № 14, табл. 4100
Переливание крови и кровезаменяющих жидкостей			
1.	Среднее число переливаний на 1-го больного	Число переливаний Число больных, которым произведено переливание	Форма ГСН № 30, табл. № 3200
2.	Среднее количество крови на 1 переливание (в л.)	Перелито крови в литрах Число переливаний	Форма ГСН № 30, табл. № 3200
3.	Частота осложнений при переливаниях	(Число больных, у которых наблюдались осложнения после переливаний) х 100 Число больных, которым произведено переливание	Форма ГСН № 30, табл. № 3200
VI.Работа вспомогательных отделений			
Рентгено-диагностическая работа			
1.	Доля амбулаторных рентгенологических исследований (в %)	Число рентгенологических исследований в поликлинике х 100 Общее число рентгенологических исследований	Форма ГСН № 30, табл. № 5110, 5112
2.	Среднее число рентгенологических исследований на 1-го стационарного больного	Число рентгенологических исследований стационарным больным Число пользованных больных в стационаре	Форма ГСН № 30, табл. № 5110, 5111
3.	Среднее число рентгенологических исследований на 100 амбулаторных посещений	(Число рентгенологических исследований в поликлинике) х 100 Общее число амбулаторных посещений, включая посещения к стоматологам и зубным врачам	Форма ГСН № 30, табл. № 2100, 2700, 5110, 5111
4.	Кратность рентгенологических просвечиваний (снимков)	Число рентгенологических просвечиваний (снимков) Число рентгенологических исследований	Форма ГСН № 30, табл. № 5110
5.	Структура рентгенологических	(Число отдельных видов рентгенологических исследований) х 100	Форма ГСН № 30, табл.

	исследований (в %)	Общее число рентгенологических исследований	№ 5110
6.	Среднедневная нагрузка врачей рентгенологов в поликлинике (стационаре)	Число исследований за год в поликлинике (стационаре) / Число рабочих дней в году	Форма ГСН № 30, табл. № 5110
Флюорографическое обследование			
1.	Нагрузка на 1 флюорограф в год	Число обследований за год / Число флюорографов	Форма ГСН № 30, табл. № 5114, 5117
Деятельность радиологического отделения			
1.	Доля больных, получивших отдельные виды радиологического лечения	(Число больных, получивших отдельные виды радиологического лечения) х 100 / Число больных, закончивших радиологическое лечение всего	Форма ГСН № 30, табл. № 4201
2.	Частота сканирований (функциональных исследований)	(Число сканирований) х 100 / Общее число радиологических исследований	Форма ГСН № 30, табл. № 4201
Деятельность лаборатории			
1.	Доля лабораторных анализов, проведенных амбулаторным больным, %	(Число лабораторных анализов, проведенных амбулаторным больным) х 100 / Общее число лабораторных анализов	Форма ГСН № 30, табл. № 5300
2.	Среднее число лабораторных анализов на 1 стационарного больного	Число лабораторных анализов произведенных стационарным больным / Число пользованных больных в стационаре	Форма ГСН № 30, табл. № 5300, 3100
3.	Среднее число лабораторных анализов на 100 амбулаторных посещений (включая помощь на дому)	(Число анализов, произведенных амбулаторным больным) х 100 / Общее число амбулаторных посещений	Форма ГСН № 30, табл. № 2100, 5300
4.	Структура лабораторных анализов (в %)	(Число отдельных видов лабораторных анализов) х 100 / Общее число лабораторных анализов	Форма ГСН № 30, табл. № 5300
5.	Число лабораторных анализов на 1000 населения	(Число лабораторных анализов) х 1000 / Среднегодовая численность населения	Форма ГСН № 30, табл. № 5300; Росстат
Деятельность кабинета функциональной диагностики			
1.	Среднее число исследований на 1-го стационарного больного	Число исследований в стационаре / Число пользованных больных в стационаре	Форма ГСН № 30, табл. № 5401
2.	Среднее число исследований на 100 амбулаторных посещений	(Число исследований в поликлинике и на дому) х 100 / Число посещений в поликлинику	Форма ГСН № 30,табл. № 5401, 2100
3.	Среднее число исследований на 1-го обследованного больного	Число исследований / Число обследованных больных	Форма ГСН № 30, табл. № 5401
Деятельность радиологического отделения			
1.	Доля больных, получивших отдельные виды	(Число больных, получивших отдельные виды радиологического лечения) х 100	Форма ГСН № 30, табл.

	радиологического лечения (в %)	Число больных, закончивших радиологическое лечение всего	№ 4201
	Деятельность физиотерапевтического отделения (кабинета)		
1.	Среднее число процедур на 1-го больного, закончившего лечение	Число отпущенных процедур / Число лиц закончивших лечение	Форма ГСН № 30, табл. № 4601
2.	Среднее число физиотерапевтических процедур на 100 амбул. посещений	(Число физиотерапевтических процедур, по-лученных амбулаторными больными) х 100 / Число посещений в поликлинику	Форма ГСН № 30, табл.4601, 2100
3.	Среднее число физио-терапевтических процедур на 1 больного в стационаре	Число физиотерапевтических процедур, отпущенных больным в стационаре / Число лечившихся в стационаре больных	Форма ГСН № 30, табл.4601, 3100
4.	Охват стационарных больных физиотерапевтическими методами лечения (в %)	(Число стационарных больных, пользовавшихся физиотерапевтическими методами лечения) х 100 / Число пользованных больных	Форма ГСН № 30, табл.4601, 3100
	Деятельность кабинета ЛФК		
1.	Среднее число отпущенных процедур на 1-го больного, закончившего лечение	Число отпущенных процедур / Число лиц, закончивших лечение	Форма ГСН № 30, табл. № 4701
2.	Среднее число отпущенных процедур на 100 амбулаторных посещений	(Число процедур, отпущенных амбулаторным больным) х 100 / Число посещений в поликлинику	Форма ГСН № 30, табл. 4701, 2100
3.	Среднее число отпущенных процедур на 1-го больного, выбывшего из стационара	Число процедур, отпущенных стационарным больным / Число выбывших больных	Форма ГСН № 30, табл. 4701, 3100
4.	Охват стационарных больных ЛФК	Число стационарных больных, охваченных ЛФК / Число выбывших больных	Форма ГСН № 30, табл. 4701, 3100
	VII. Стационарозамещающая помощь (без стационаров на дому)		
1.	Обеспеченность местами в дневных стационарах (на 10000 населения)	(Число мест, развернутых на конец года) х 10000 / Численность населения на конец года	Форма ГСН № 14-дс, Росстат
2	Средняя занятость мест в году в дневных стационарах	Число дней лечения, проведенных больными / [Среднегодовое число мест в дневных стационарах (больничных и амбулаторно-поликлинических учреждениях)]	Форма ГСН № 14-дс
3.	Уровень госпитализации	(Число госпитализированных больных) х100 / Среднегодовая численность населения	Форма ГСН № 14-дс, Росстат
4.	Средняя длительность пребывания больного в дневных стационарах	Число дней лечения, проведенных больными / Число пользованных больных	Форма ГСН № 14-дс
	VIII. Охрана здоровья матери и ребенка		

1.	Своевременность охвата беременных наблюдением женской консультацией (в %)	(Число женщин, поступивших под наблюдение консультации со сроком беременности до 12 нед).х 100 / Число беременных женщин, поступивших под наблюдение консультации всего	Форма ГСН № 32, табл. 2110
2.	Доля женщин, закончивших беременность в отчетном году родами (в %)	(Число женщин, закончивших беременность родами) х 100 / Число женщин, закончивших беременность	Форма ГСН № 32, табл.2110
3.	Число абортов на 1000 женщин фертильного возраста (от 15 до 49 лет)	(Число абортов) х 1000 / Численность женщин фертильного возраста	Форма ГСН № 13; Росстат
4.	Число абортов на 100 родившихся живыми и мертвыми	(Число абортов) х 100 / Число родившихся живыми и мертвыми	Форма ГСН №13, табл.1000, Росстат
5.	Соотношение родов и абортов	Число родов за отчетный период / Число абортов за отчетный период	Форма ГСН № 13, табл. 1000, Форма ГСН № 32, табл.2110
6.	Удельный вес нормальных родов (в %)	(Число нормальных родов) х 100 / Число родов	Форма ГСН № 32, табл.2210
7.	Охват женщин средствами контрацепции (ВМС + гормональная контрацепция)	Число женщин на конец года, имеющих ВМС и использующих гормональную контрацепцию / Численность женщин фертильного возраста (от 15 до 49 лет)	Форма ГСН № 30; Росстат
8.	Заболеваемость детей 1-го года жизни	(Число зарегистрированных заболеваний у детей в возрасте до 1 года) х 1000 / Среднегодовая численность детей в возрасте до 1 года	Форма ГСН № 31, табл. № 2300; Росстат
9.	Структура заболеваемости детей 1-го года жизни (в %)	(Число зарегистрированных данных заболеваний у детей до 1 года) х 100 / Общее число заболеваний детей в возрасте до 1 года	Форма ГСН № 31, табл. № 2300; Росстат
10.	Удельный вес детей, находящихся на грудном вскармливании (в %)	[(Число детей, находившихся на грудном вскармливании (с 3-х до 6 мес.; с 6 мес. до 1 года)] х 100 / Среднегодовая численность детей до 1 года	Форма ГСН № 31, табл. № 2400; Росстат
11.	Удельный вес детей с различными нарушениями здоровья (в %)	(Число всех выявленных при профосмотрах детей до 14 лет с различными нарушениями здоровья) х 100 / Число всех осмотренных детей до 14 лет	Форма ГСН № 31, табл. № 2500

Лабораторная работа №1

Тема: Связь между частотой появления события и его вероятностью.

Цель: Экспериментально установить зависимость между частотой появления события и его вероятности при постоянном числе испытаний и при увеличении числа испытаний.

Задание:

1. Каждый студент проводит 100 экспериментов по бросанию монеты, результаты заносит в таблицу: выпадения «герба» обозначает «Х», а выпадение «решки» - «0». Затем подсчитывает количество выпадений «герба».

2.По результатам эксперимента у студентов всей группы заполняется следующая таблица:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
m												
$\frac{m}{n}$												

n – число испытаний;

m – число выпадений герба (у каждого студента по списку);

$\frac{m}{n}$ – частота выпадения герба.

3. По данным таблицы построить график и отметьте на нем теоретическую вероятность выпадения «герба»:

Лабораторная работа №2

Тема: Обработка статистических данных выборочным методом.

Цель: Экспериментально составить выборку, определить параметры выборки и представить ее графически в виде полигона и гистограммы.

1. Подсчитайте пульс в течение 1 минуты. Из значений полученных каждым студентом группы составьте выборку.
2. Запишите выборку в виде вариационного ряда.
3. Определите объем выборки *n*.
4. Определите размах выборки X_{max} - X_{min}.
5. Запишите выборку в виде статистического ряда.
6. Запишите выборку в виде выборочного распределения.
7. Постройте полигон частот выборки.
8. Постройте гистограмму выборки.
9. Вычислите среднее значение выборки.
10. Вычислите выборочную дисперсию.
11. Вычислите несмещенную выборочную дисперсию.
12. Сделайте вывод.

Приложение. Графы

1. Основные понятия теории графов

Графические представления – удобный способ иллюстрации различных понятий, отображения исследуемого процесса. Все более распространенным становится представление количественных показателей в виде гистограмм, круговых и столбцовых диаграмм, по наглядным характеристикам которых (высота, ширина, площадь, радиус и др.) можно судить о количественных соотношениях сравниваемых объектов, значительно упрощая их анализ. Мощным и наиболее исследованным классом объектов, относящихся к графическим представлениям, являются так называемые *графы.* В *теории графов* используется геометрический поход к изучению объектов. Основное понятие теории – *граф* – задается множеством вершин (точек) и множеством ребер (дуг), соединяющих некоторые пары вершин. Пример графа – схема метрополитена: множество станций (вершины графа) и соединяющие их линии (ребра графа). Основоположником теории графов является Леонард Эйлер, опубликовавший в 1736 г. решение задачи о кенигсбергских мостах. В городе Кенигсберге было два острова, соединенных семью мостами так, как показано на рисунке 1. Задача состояла в следующем: найти маршрут прохождения всех четырех частей суши *(A, B, C, D),* который бы начинался с любой из них, кончался на ней же и только один раз проходил по каждому мосту.

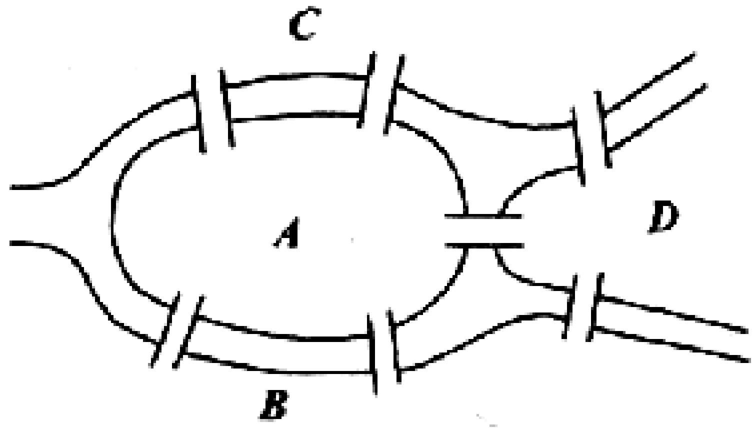


Рис. 1

Эйлер доказал, что задача не имеет решений. Для этого он обозначил каждую часть суши точкой (вершиной), а каждый мост — линией (ребром). Получился граф, представленный на рисунке 2. Утверждение о невозможности нахождения указанного маршрута эквивалентно утверждению о невозможности обойти граф указанным образом.

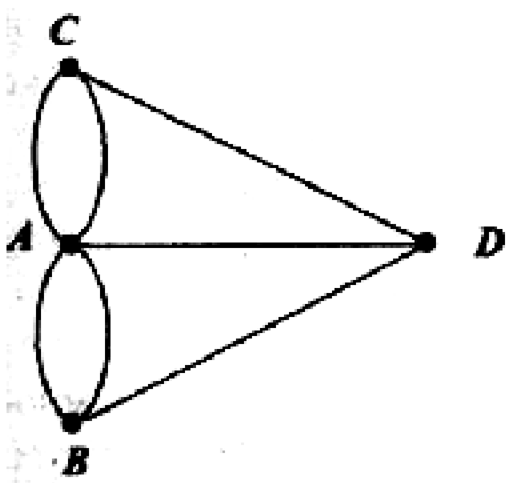


Рис. 2

Отправляясь от этого частного случая, Эйлер обобщил постановку задачи и нашел критерий обхода (специального маршрута): граф должен быть связанным, а каждая его вершина должна быть инцидентна четному числу ребер. Существенный вклад в теорию графов внесли в первой половине XX в. немецкие ученые Кирхгоф и Келли. Изучение Кирхгофом электрических цепей привело к разработке основных понятий и получению ряда теорем, касающихся деревьев в графах. Келли подошел к исследованию деревьев, решая задачи исследования химических веществ с различными типами молекулярных соединений. Однако широкое распространение теория графов получила лишь с 50-х гг. в связи со становлением кибернетики и развитием вычислительной техники, когда теория графов существенно обогатилась новыми материалами и подходами. Тогда же началось системное изучение графов с различных точек зрения (структурная, информационная и др.). В это время формулировались проблематика и методы теории графов. Графы находят применение при проектировании вычислительных машин, в теории программирования, в изучении химических, физических и технологических процессов, в решении задач сетевого планирования и управления, в проектировании организационных структур управления, в лингвистических и социологических исследованиях и т.д. Теория графов тесно связана с топологией, теорией чисел, комбинаторикой, алгеброй и другими разделами математики.

Теория графов решает большое число разнообразных задач. Это задачи по анализу графов, определению характеристик их строения, подсчет графов или их частей, обладающих определенными свойствами, решение транспортных задач, связанных с перевозкой грузов по сети и др. Отдельный класс составляют задачи по синтезу графов с заданными свойствами.

2. Основные определения

Графом G называется совокупность двух множеств: *вершин* V и *ребер* E, между элементами которых определено отношение *инцидентности* — каждое ребро $e \in E$ инцидентно ровно двум вершинами u и v, которые оно соединяет. Вершины u и v называют смежными, а о вершине u и ребре e говорят, что они инцидентны, так же как и v и e. Если два ребра

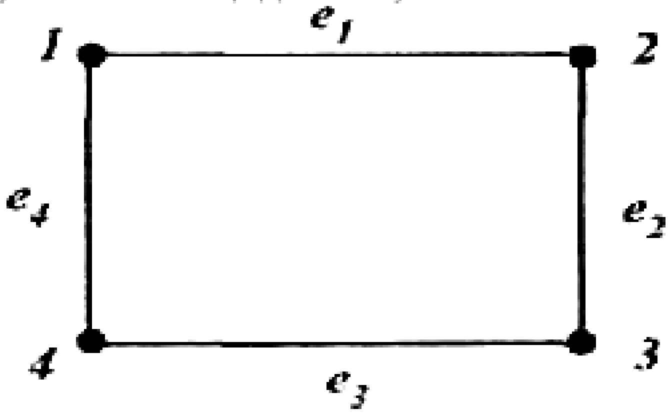


Рис. 3

инцидентны одной и той же вершине, то они называются смежными.

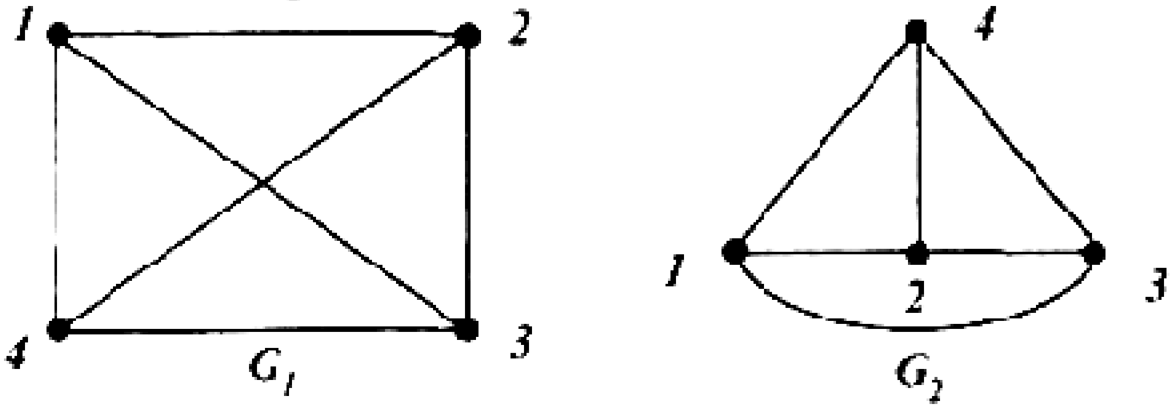


Рис. 4

На рисунке 4 вершины *1 и 2* – смежные, *1* и *3* – нет. Ребра e_1 и e_2 — смежные, а e_1 и e_3 – нет. При изображении графа не все его детали одинаково важны. Несущественными являются геометрические свойства ребра (длина, кривизна и т.д.) и взаимное расположение вершин на плоскости. На рисунке 4 приведены одинаковые графы G_1, и G_2 (G_1=G_2). Граф называется *правильным*, если его ребра не имеют общих точек, отличных от вершин графа. На рисунке 4 правильный граф G_2, граф G_1 – неправильный, так как ребра, соединяющие вершины 1, 3 и 2, 4 имеют общую точку, которая не является вершиной графа (точка пересечения диагоналей прямоугольника). Для любого графа существует его правильная реализация в пространстве, но не любой граф можно правильно реализовать на плоскости. Правильно реализованные на плоскости графы называются *плоскими*. Граф G_2 на рис. 4 является плоским. Примером неплоского графа может служить граф G_1 + G_2 на рис. 4. Чтобы реализовать неплоские графы в пространстве в микроэлектронике пришлось создать технологию многослойных печатных плат. Ребра, соединяющие вершины сами с собой, называются ***петлями.*** На рисунке 5б петли обозначены e_1, e_2, e_3. Ребра, инцидентные одной и той же паре вершин, называются *параллельными,* или *кратными (m, p* на рис. 5а и *x, y, z* – параллельны).

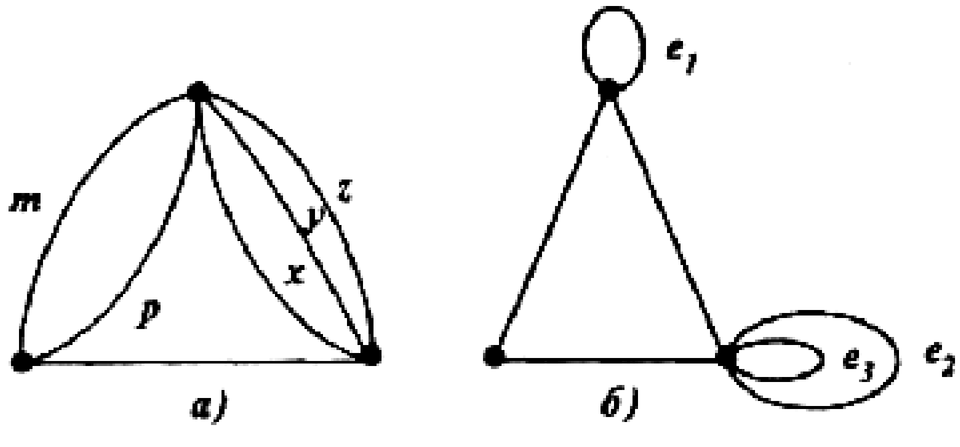


Рис.5

Ребро, соединяющее две вершины, может иметь направление от одной вершины к другой, оно называется *направленным,* или *ориентированным.* На рисунке 6 представлены примеры графов с тремя вершинами и тремя дугами.

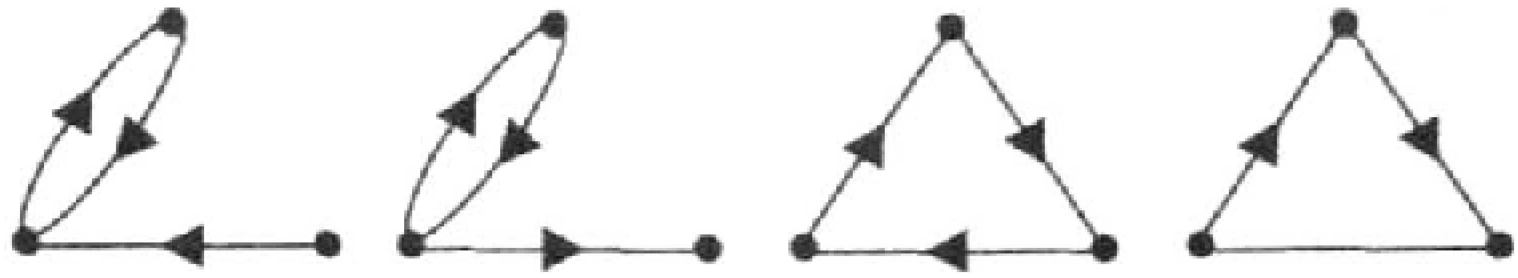
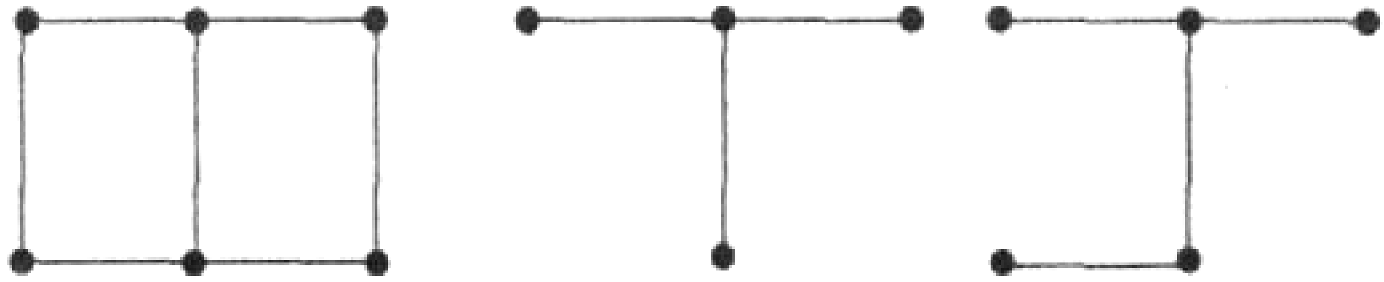


Рис.6.

Граф, соединяющий ненаправленные ребра, называется *неориентированным* (рис. 2-5).

Граф называется *конечным,* если множество его элементов (вершин и ребер) конечно, и *пустым*, если множество его вершин, а значит, и ребер пусто. Граф называется *полным*, если каждая пара вершин соединена ребром и граф не содержит петель и кратных ребер.

Дополнением графа G называется граф $\overline{G}$, имеющий те же вершины, что и граф G, и содержащий только те ребра, которые надо добавить к графу G, чтобы получить полный граф. Подграфом графа G называется граф, у которого все вершины и ребра принадлежат G. На рисунке 7а изображен граф, а на рис. 7б – два его подграфа.



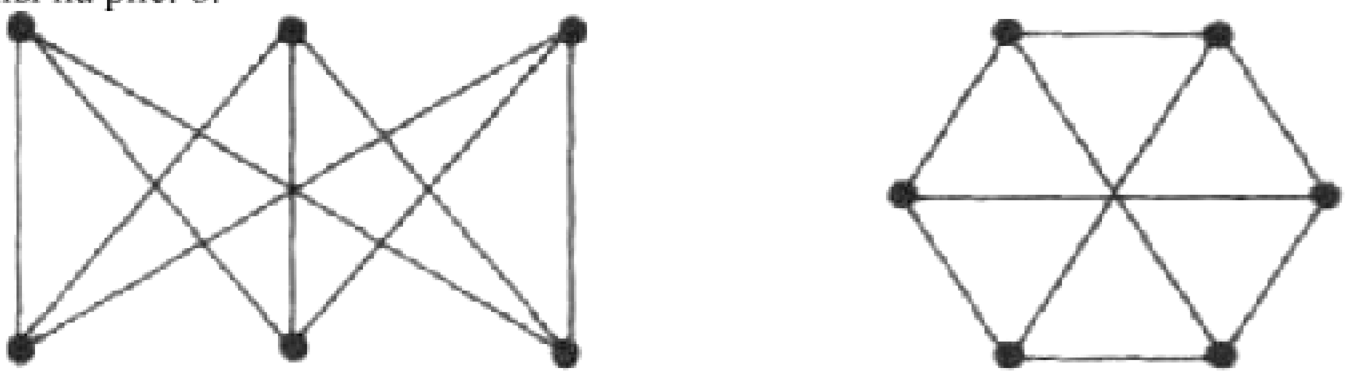
а) ***б)***

Рис.7

Графы G_1 и G_2 называются равными ($G_1 = G_2$), если множества их вершин и ребер (выраженных через пары инцидентных им вершин) совпадают: $V_1 = V_2$ и $E_2 = E_2$ (рис.4).

Граф G является полностью заданным, если нумерация его вершин и ребер зафиксирована. Графы, отличающиеся только нумерацией вершин, называются ***изоморфными.*** Изоморфизм есть отношение эквивалентности на графах, т.е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. В математике понятие «изоморфизм» означает похожесть однотипных

объектов. Запись $G_1 \simeq G_2$ означает, что графы G_1 и G_2 — изоморфны. Изоморфные графы изображены на рис. 8.



$\boldsymbol{G_1 \simeq G_2}$

Рис. 8

Локальной степенью $\rho(V)$ (или просто степенью) вершины графа G называют количество ребер, инцидентных вершине V. Поскольку каждое ребро инцидентно двум вершинам, в сумму степеней вершин графа каждое ребро вносит двойку. Таким образом, мы приходим к утверждению, которое установлено Эйлером и является исторически первой теоремой теории графов. Сумма степеней вершин графа G равна удвоенному числу его ребер:

$$\sum_{V \in G} \rho(V) = 2q.$$

В любом графе число вершин с нечетными степенями четно (см. пример 2).

Для вершин орграфа (графа с ориентированными ребрами) определяются две локальные степени:

1) $\rho_1(V)$ — число ребер с началом в вершине V, или количество выходящих из вершины V

ребер;

2) $\rho_2(V)$ — количество входящих в V ребер, для которых эта вершина является концом.

Петля дает вклад 1 в обе эти степени. В орграфе суммы степеней всех вершин $\rho_1(V)$ и $\rho_2(V)$ равны количеству ребер m этого графа, а значит и равны между собой (см. пример 2):

$$\sum_V \rho_1(V) = \sum_V \rho_2(V) = m.$$

Вершина графа называется *изолированной,* если ее локальная степень равна нулю: $\rho(V) = 0$. *Концевой* называют вершину, локальная степень которой равна 1: $\rho(V) = 1$.

Графы, у которых все вершины имеют одинаковую степень, *называются регулярными,* или *однородными.*

Пример 1. Задать граф, представленный на рисунке 8.9, через множество вершин $\boldsymbol{V}$ и ребер $\boldsymbol{E}$.

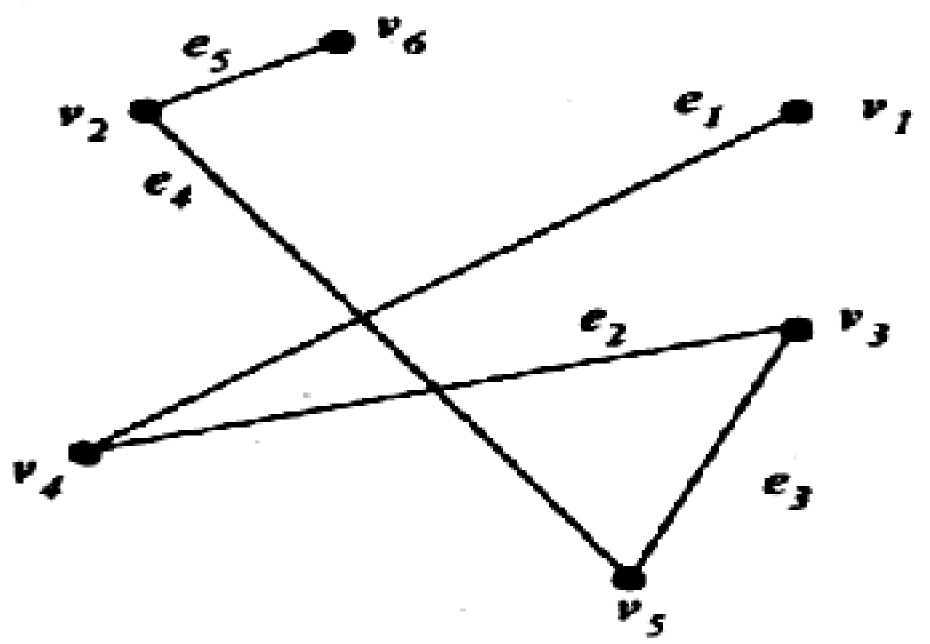


Рис. 9

Решение: Множество поименованных вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$. Множество поименованных ребер $\boldsymbol{E} = \{e_1, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_4}, \boldsymbol{e_5}\}$. Для задания графа требуется установить отношение инцидентности ребер соответствующим вершинам. Множество ребер, каждое из которых представлено парой своих концевых вершин:

$E = \{(v1, v_4), (v_4, v_3), (v_3, v_5), (v_5, v_2), (v_2, v_6)\}$. Порядок указания вершин при описании ребра здесь безразличен, так как все ребра в графе G неориентированы.

Пример 2. Определить степени вершин графов, изображенных на рис. 10.

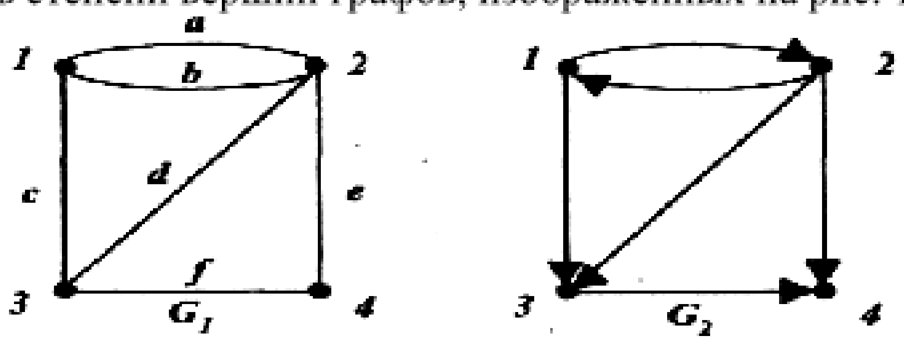


Рис. 10

Решение: Степени вершин неориентированного графа G_1:

$$\rho(1) = 3,\ \rho(2) = 4,\ \rho(3) = 3,\ \rho(4) = 2.$$

Сумма степеней всех вершин графа G_1 равна 12, т.е. вдвое больше числа ребер.

Степени вершин ориентированного графа G_2: ρ_1 определяет количество выходящих ребер,

$\rho_1(1) = 2$, $\rho_1(2) = 4$, $\rho_1(3) = 1$, $\rho_1(4) = 0$. ρ_2 определяет количество входящих в вершину ребер,

$p_2(1)=1$, $p_2(2)=1$, $p_2(3) = 2$, $p_2(4) = 2$.

Суммы степеней вершин первого и второго типа ориентированного графа G_2 совпадают и равны числу ребер графа:

$$\sum_V \rho_1(V) = \sum_V \rho_2(V) = 6 = m.$$

3. Маршруты, цепи, циклы

Рассмотрим неориентированный граф G.

Маршрутом в графе G называется чередующаяся последовательность вершин и ребер, в которой каждые два соседних ребра e_n и e_{n+1} имеют общую вершину. В маршруте одно и то же ребро может встречаться несколько раз. *Начало маршрута* – вершина v_1, инцидентная ребруe_1 и не инцидентная ребру e_2. Вершину v_n, инцидентную ребру e_n и не инцидентную ребру e_{n+1} называют *концом маршрута.* Маршрут называется *замкнутым,* если $v_1 = v_n$, и *открытым* в противном случае. Маршрут называется *цепью,* если все его ребра различны. Цепь, содержащая только различные вершины и ребра и не пересекающая себя, называется *простой цепью.* Замкнутый маршрут называется *циклом,* если он является цепью, и *простым циклом,* если это простая цепь.

На рисунке 11 представлен граф G, иллюстрирующий описанные выше понятия.

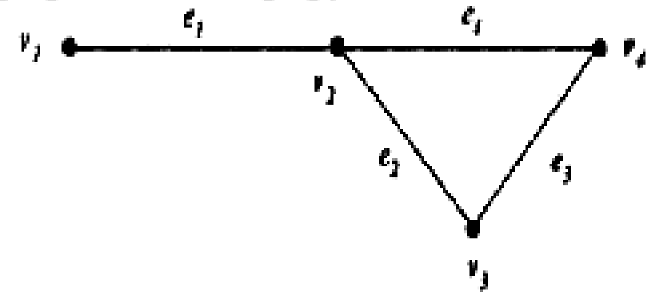


Рис.11

На графе G маршрут $v1v_2v_3v_2v_4$ не является цепью, так как дважды содержит ребро e_2.

Маршрут $v1v_2v_3v_4$ является примером простой цепи, а $v_2v_3v_4v_2$ — простой цикл.

Две вершины v_k и v_n называются связными, если существует маршрут с началом в вершине v_k и концом в вершине v_n. Между связанными вершинами всегда существует простая цепь. Граф G называется *связным,* если любая пара его вершин соединена простой цепью. Максимальный связный подграф графа G называется *компонентом* графа G. Итак, несвязный граф имеет как минимум два компонента. Граф на рис. 12 имеет 7 компонент.

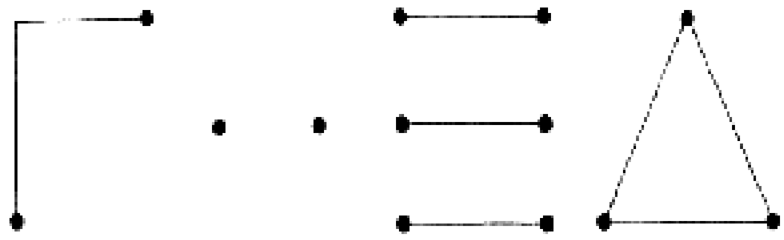


Рис. 12

В связном графе все подграфы связны, следовательно, неориентированный граф распадается единственным образом в сумму своих связных графов. Длина маршрута $v_1...v_n$ равна количеству ребер в маршруте, причем каждое ребро считается столько раз, сколько раз оно встречается в данном маршруте. Пусть G_1 – ориентированный граф. Последовательность ребер, в которой конец одного ребра совпадает с началом другого, называется *путем.* Соблюдение ориентации ребер в пути обязательно, а вот одно и то же ребро может встречаться несколько раз. Путь называется *ориентированной цепью*, если каждое ребро в нем встречается один раз. *Простой цепью* в ориентированном графе называют путь, в котором любая вершина инцидентна не более чем двум ребрам. Замкнутый путь называется *контуром.* Если контур является простой цепью, то его называют *простым циклом,* если обычной цепью, то – *циклом.* Всякий граф, содержащий циклы, содержит и простые циклы. Орграф называется *связным,* если он связен без учета ориентации его ребер, и *сильно связным,* если из любой вершины v существует путь в любую другую вершину u с учетом ориентации ребер. Расстоянием $d(u, v)$ между двумя вершинами u и v графа G называется длина кратчайшей постой цепи, соединяющей эти вершины. Если u и v не соединены, то расстояние между ними равно бесконечности $d(u,v)=\infty$. В связном графе расстояние удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $d(u,v) \geq 0$;
2) $d(u,v) = 0$, тогда и только тогда, когда $u = v$;
3) $d(u, v) = d(v,u)$;
4) $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$.

Центром ориентированного графа называется вершина, от которой наибольшее расстояние до других вершин является минимальным. Максимальное расстояние от центра графа до его вершин *называется радиусом графа* $r(G)$. Цепь, которая включает все ребра графа, но имеет различные начало и конец, называется *эйлеровой.* Цикл, содержащий все ребра графа, называется *Эйлеровым.* Эйлеров граф содержит эйлеров цикл.

Теорема Эйлера: неориентированный конечный граф G является эйлеровым, если он связен и все его вершины имеют четные степени.

Гамильтонов цикл — простой цикл, проходящий через все вершины графа. *Гамильтонова цепь* – это простая цепь с началом и концом в разных вершинах, соединяющая все вершины графа. *Обхват графа* G — это длина кратчайшего простого цикла, обозначается $g(G)$. *Окружение графа* – обозначается $c(G)$ – длина самого длинного простого цикла. Если граф G не содержит циклов, то понятия обхвата и окружения для него не определены.

Пример 3. В графе G, изображенном на рисунке 13, указать примеры маршрута, цепи, простой цепи, замкнутого маршрута, цикла, простого цикла.

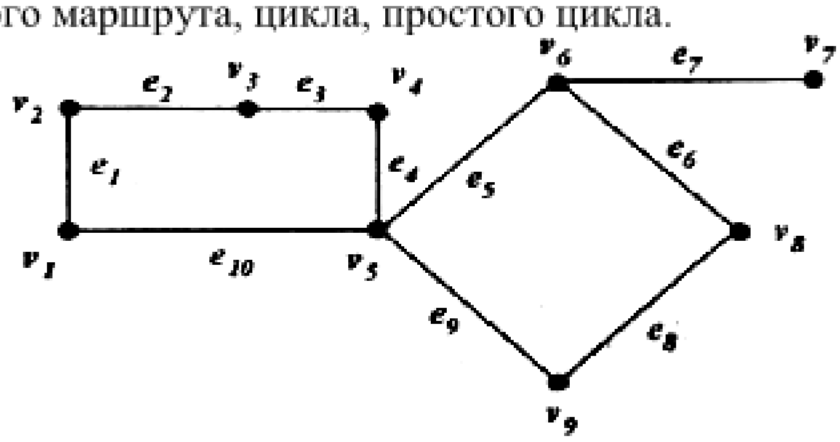


Рис. 13

Решение:

1. Пример маршрута, соединяющего вершины $v1$ и v_9, не являющегося цепью:$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_8, e_9, e_5, e_6, e_8)$ или $(e_{10}, e_9, e_8, e_6, e_5, e_9)$ и другие.
2. Пример цепи, которая не является простой цепью, соединяющей вершины v_6 и v_9: $(e_5, e_4, e_3, e_2, e_1, e_{10}, e_9)$.
3. Пример простой цепи, соединяющей вершины v_6 и v_9: (e_6, e_8) или (e_5, e_9).
4. Замкнутый маршрут, не являющийся циклом: $(e_{10}, e_5, e_6, e_8, e_9, e_5, e_6, e_8, e_9, e_{10})$.
5. Цикл, не являющийся простым циклом: $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_8, e_9, e_{10})$.
6. Простой цикл: $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_{10})$ или (e_5, e_6, e_8, e_9).

При описании цикла любая вершина может быть выбрана в качестве начала, поэтому простой цикл (e_5, e_6, e_8, e_9) можно записать (e_6, e_8, e_9, e_5), или (e_8, e_9, e_5, e_6) и (e_9, e_5, e_6, e_8).

Пример 4. Какие из графов G_1, G_2, G_3 (рис. 14) являются связными, сильно связными?

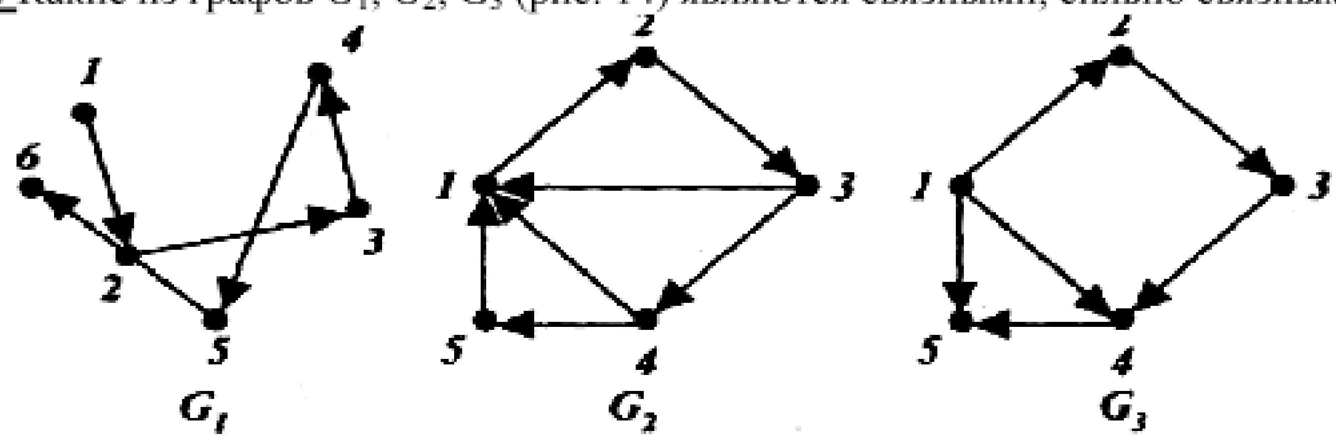


Рис. 14

Решение: Граф G_1 является связным, так как любая пара его вершин соединена простой цепью, а вот сильно связным он не является, так как, например, вершина 1 недостижима из других вершин с учетом ориентации ребер.

Граф G_2 связен и сильно связен, поскольку любая из его вершин достижима из другой вершины при движении в указанном направлении.

Граф G_3 связен, но не сильно связен, так как, например, из вершины 4 невозможно по указанной ориентации попасть в вершины 1, 2, 3, а из вершины 5 невозможно попасть ни в какую другую вершину.

Пример 5. Для графов, изображенных на рис. 15, определить расстояние между вершинами.

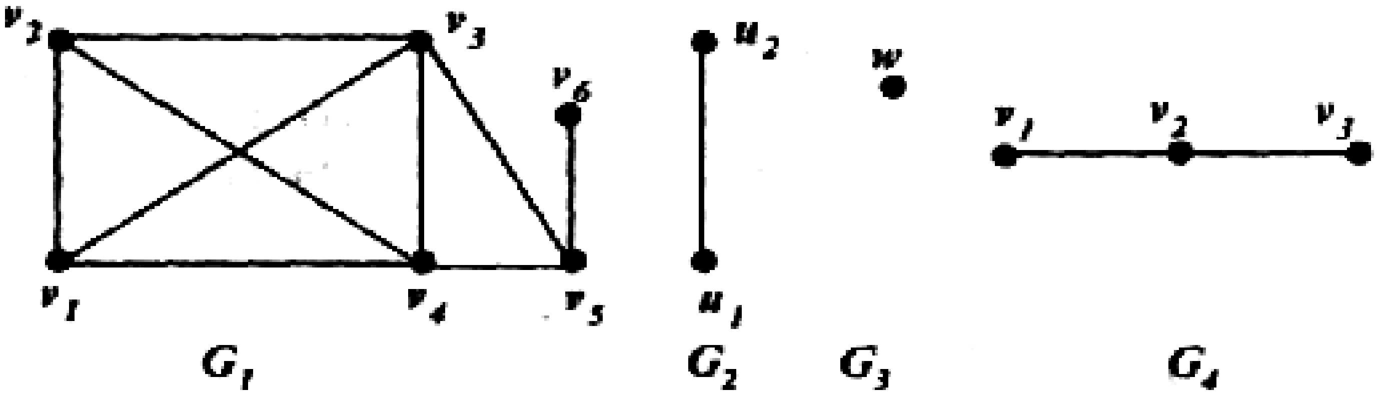


Рис. 15

Решение: По определению, расстояние между двумя вершинами – это длина кратчайшей простой цепи, соединяющей эти вершины.

Для графа G_1: $d(v1,v_2) = d(v1,v_4) = d(v1,v_3) = 1$,

$d(v1,v_5) = 2$, $d(v1,v_6) = d(v_2,v_5) = 3$ и т.д.

Для графаG_2: $d(u_1,u_2) = 1$, $d(u_1,u_1) = 0$,$d(u_2,u_2) = 0$.

Для графа G_3:$d(w,w) = 0$.

Для графа G_4: $d(v1,v_2) = 1$, $d(v1,v_3) = 2$,$d(v_2,v_3) = 1$,$d(v1, v1) = 0$ и т.д.

<u>Пример 6</u>. Определите центры и радиусы графов, изображенных на рисунке 15.

Решение: Определим максимальное расстояние от каждой вершины графа:

G_1: $r(v1) = 3$, так как наиболее длинная минимальная простая цепь ($v1$, v_3, v_5, v_6) содержит 3 ребра. $r(v_2) = 3$ [простая цепь — (v_2,v_3, v_5,v_6)], $r(v_3) = 2$, $r(v_4) = 2$, $r(v_5) = 2$, $r(v_6) = 3$.

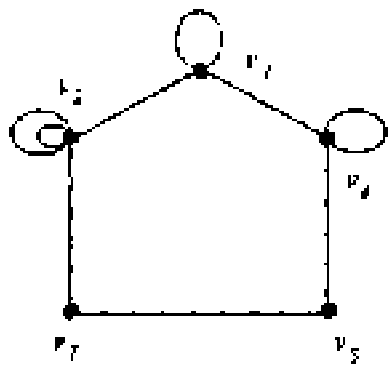
G_2: $r(u_1) = 1$, $r(u_2) = 1$.

G_3: $r(w) = 0$.

G_4: $r(v1) = 2$ [простая цепь – ($v1$, v_2, v_3)],$r(v_2) = 1$, $r(v_3) = 2$ [простая цепь – (v_3, v_2, $v1$)].

Максимальное расстояние до других вершин минимально в графе G_1 от вершин v_3, v_4, v_5. Следовательно, эти три вершины являются центрами. Радиус графа G_1 равен 2. Аналогично, для G_2 обе вершины u_1 и u_2 являются центрами и $r(G_2)$= 1. В графе G_3 центр – вершина w и $r(G_3) = 0$. G_4: центр – вершина v_2, $r(G_4) = 1$.

<u>Пример 7</u>. Имеет ли пятиугольник, с центрами в некоторых вершинах, эйлерову цепь или эйлеров цикл (рис.16)?



Решение: Любая вершина пятиугольника, не содержащая петель, имеет степень 2. Каждая петля дает вклад в степень вершины, равный 2. Таким образом все вершины изображенного пятиугольника имеют четные степени: $\rho(v1) = 2$, $\rho(v_2) = 6$, $\rho(v_3) = 4$, $\rho(v_4) = 4$, $\rho(v_5) = 2$. По теореме Эйлера заданный граф является эйлеровым и содержит эйлеров цикл. Чтобы в конечном неориентированном графе существовала эйлерова цепь (цепь, проходящая через все ребра с разными началом и концом), необходимо и достаточно, чтобы начальная к конечная вершины имели нечетную степень, а все остальные вершины – четную. Это условие в заданном пятиугольнике не выполняется, следовательно, он не содержит эйлерову цепь.

<u>Пример 8.</u> Определите наличие гамильтоновых циклов и цепей в графах, изображенных на рис 17.

Решение: Простой цикл, проходящий через все вершины графа (гамильтонов цикл), существует в графе G_1 Он проходит через все вершины графа по ребрам (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8), соединяющим все вершины графа. В графе G_1, существуют и гамильтоновы цепи, которые получаются из гамильтонова цикла удалением любого ребра.

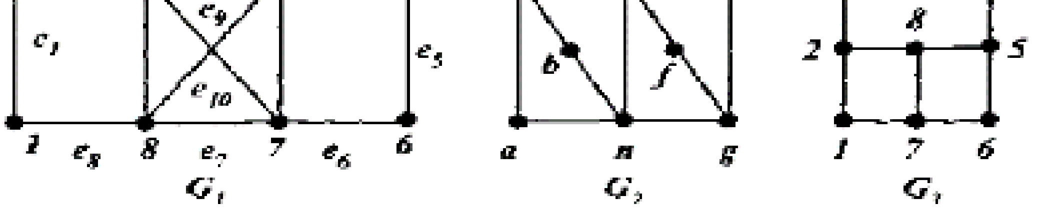


Рис. 17

В графе G_2 нет гамильтонова цикла, так как при обходе внешнего прямоугольника *(a, c, e,* *g)* цикл должен содержать все ребра, лежащие на сторонах прямоугольника, но тогда он не проходит через вершины *b* и *f*. Не существует в графе G_2 и гамильтоновой цепи.

В графе G_3 нет гамильтонова цикла, но есть гамильтонова цепь. Например, цепь, содержащая ребра, соединяющие вершины 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

4. Деревья

Существует один простой, но важный тип графов, который называется деревом. Деревья находят приложения в различных областях знаний и, кроме того, в силу предельной простоты строения, являются модельными объектами при решении различных задач теории графов. Деревом называется связный граф, не содержащий циклов, а значит петель и кратных ребер. Связность графа означает, что при удалении хотя бы одного ребра, он теряет связность (рис. 18). В дереве число вершин и число ребер жестко связаны: если вершин ***n***, то ребер — на единицу меньше (***n***-1).

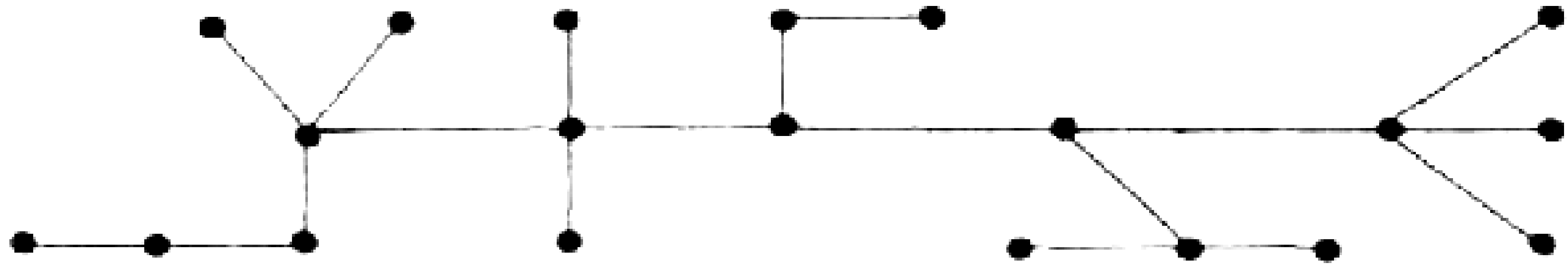


Рис. 18

Вершина V графа G называется концевой, если ее степень $\rho(V) = 1$. Ребро, инцидентное концевой вершине, называется концевым.

Для того чтобы ориентировать дерево, выбирается вершинаV_0, которую называют *корнем дерева,* и все ребра такого *дерева с корнем* ориентируются от этой вершины.

Пусть дано конечное дерево G. *Вершинами типа 1* называются его концевые вершины.

Если у дерева *G* удалить все вершины типа 1 и инцидентные им ребра, то в оставшемся дереве *G'* концевые вершины называются *вершинами типа 2* в дереве *G*.

Аналогично определяются вершины типов 3, 4, 5 и т.д. Цикломатическим числом конечного неориентированного графа называется: $V(G)=VC+VE-VV$,

Где VC — число связных компонент графа; VE – число ребер графа; *VV* – число вершин.

Пример 9. Дано дерево *G* (рис. 18). Определить число вершины максимального типа, цикломатическое число графа. Построить ориентированное дерево с корнем V_0, являющимся вершиной максимального типа.

Решение: Пользуясь определением, обозначим кошевые вершины дерева *G* типом 1. Отсекая их и инцидентные им ребра, найдем вершины типа 2 (рис. 19). Оставшееся дерево назовем G_1.

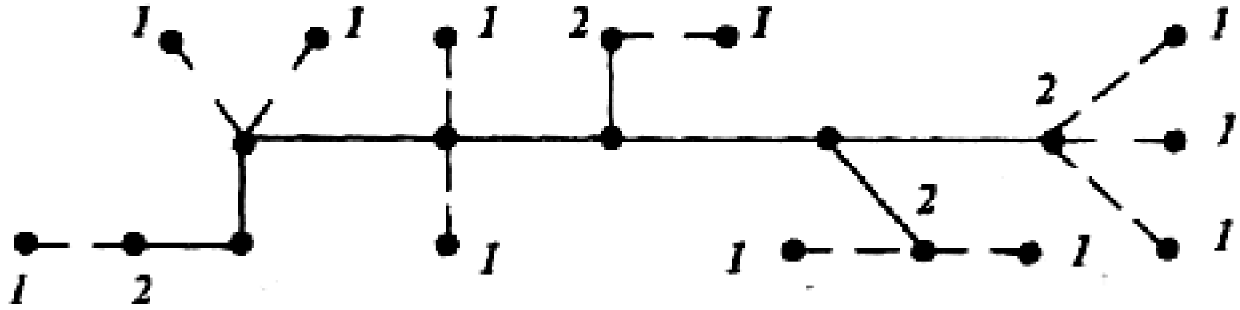


Рис. 19

Из полученного дерева G_1 удалим вершины типа 2 и инцидентные им ребра, обозначим вершины типа 3 (рис. 20).

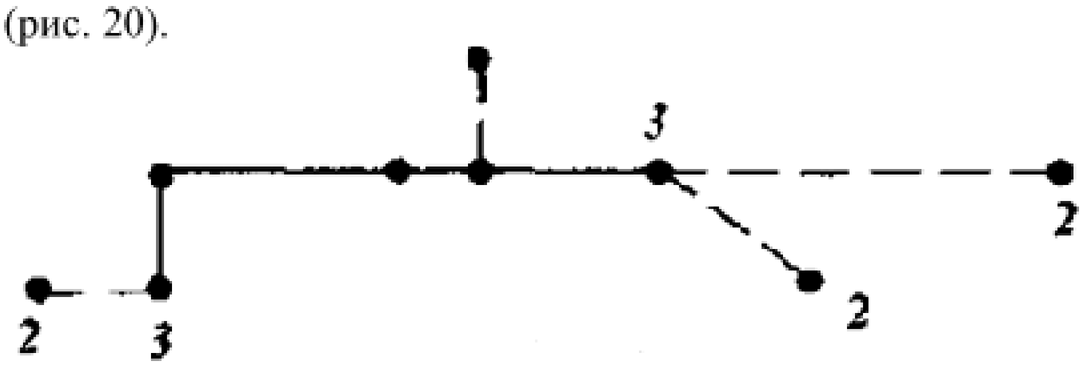


Рис. 20

Аналогичными действиями определим тип остальных вершин. Окончательный результат представлен на рис. 21.

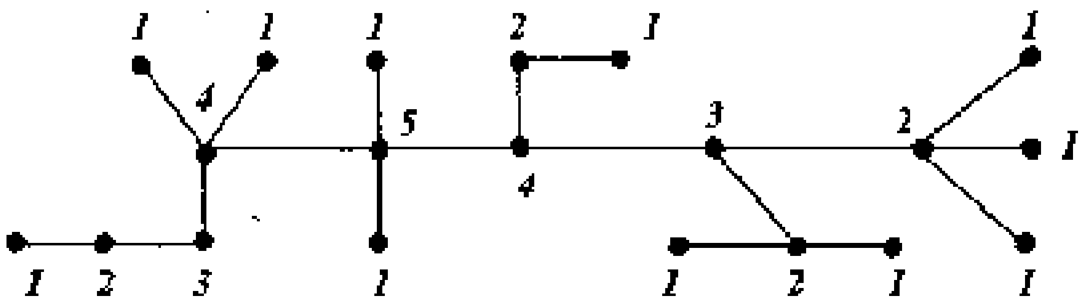


Рис. 21

Итак, максимальный тип вершины 5 и такая вершина одна. Для расчета цикломатического числа определим число связных компонент: VC = 1 (для любого дерева, согласно определению VC = 1). Число вершин VV = 20, число ребер VE = 19.

$$V(G)= 1 + 19–20 = 0.$$

Учитывая, что в любом дереве число ребер на единицу меньше числа вершин, получим одинаковое, равное нулю, цикломатическое число для любого дерева. Ориентированное дерево с корнем в вершине типа 5 представлено на рис 22.

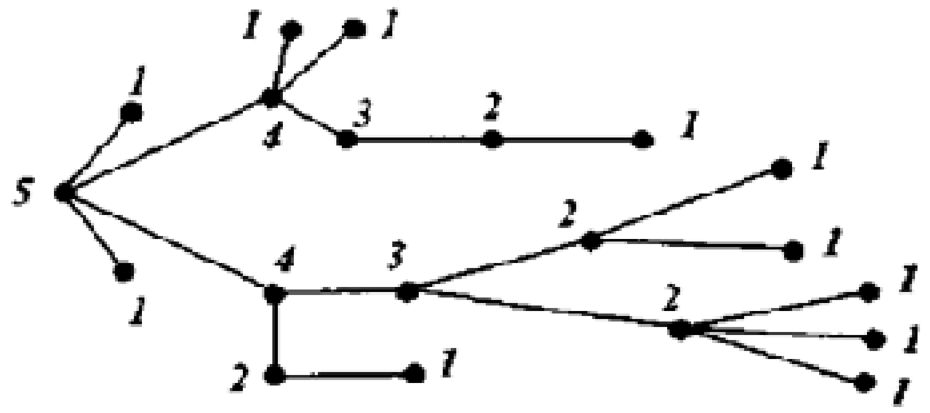


Рис. 22

5.Операции над графами

В ряде случаев удобно представить структуру рассматриваемого графа с помощью графов меньшего размера и более простой структуры.

Пусть графы G1 и G2 имеют непересекающиеся множества вершин V1 и V2 и непересекающиеся множества ребер E1 и *E2.*

Объединением графов G1∪G2 называют граф, множеством вершин которого являются V= V1 и V2, а множеством ребер — *E = E1∪E2* (рис. 23).

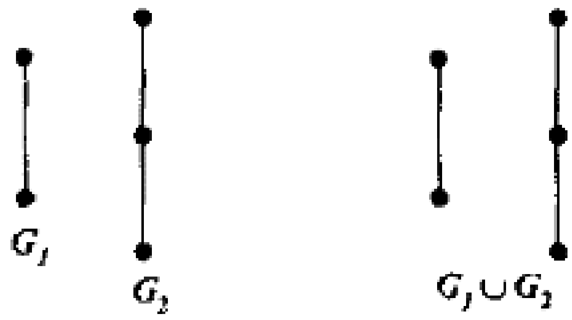


Рис. 23

Соединение графов G1+G2 состоит из G1∪G2 и всех ребер, соединяющих V1 и V2(рис. 24).

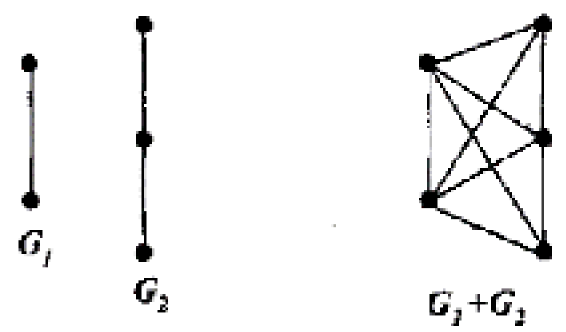


Рис. 24

Произведением графов G1× G2 называется граф, вершины которого $u=(u_1, u_2)$ и $v = (v_1,u_2)$ смежны тогда и только тогда, когда [$u_1 = v_1$ и u_2, v_2 — смежные вершины] или [$u_2=v_2$ и u_1, v_1 – смежные вершины].

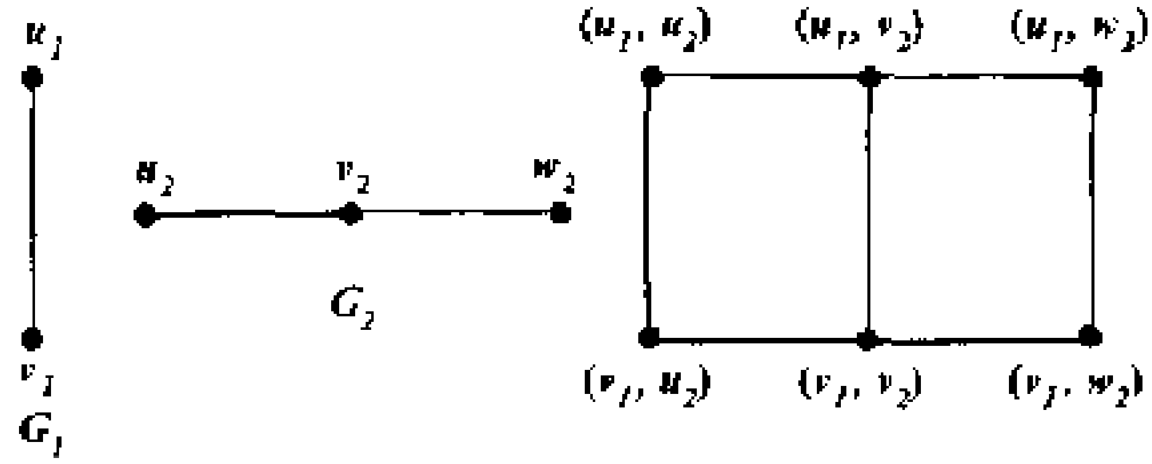


Рис. 25

Композицией $G = G1$[G2] называют такой граф *G*, вершина которого $u=(u_1,u_2)$ смежна с $v = (v_1, v_2)$ тогда и только тогда, когда [u_1, v_1 – смежные вершины] или [$u_1 = v_1$ и u_2, v_2 – смежные вершины].

Композиции графов G1 и G2 представлены на рис. 26.

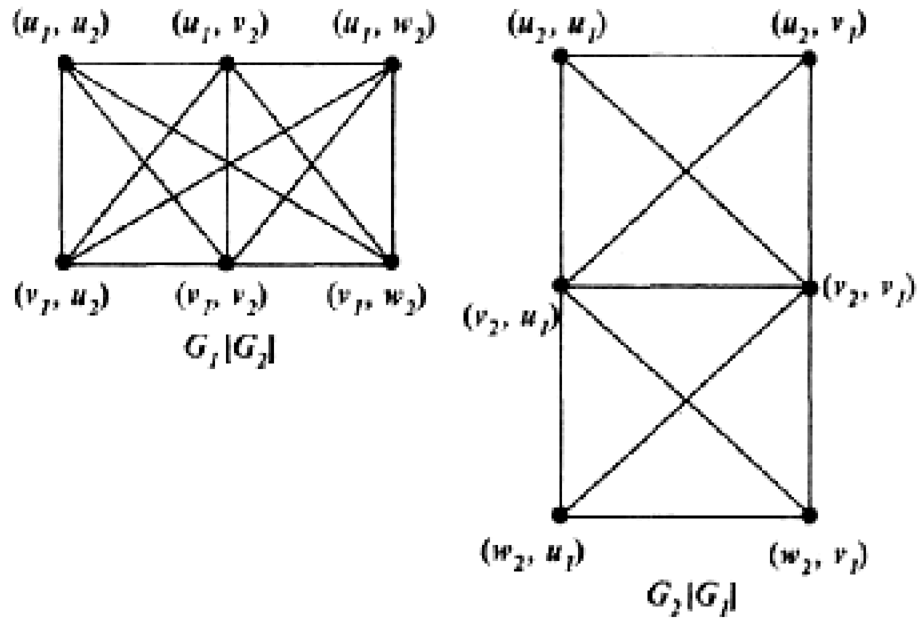


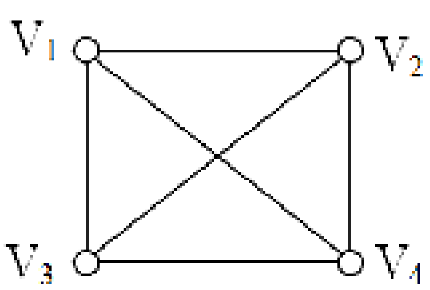
Рис. 26

Упражнения для самостоятельного решения

1. Изобразите в виде ориентированного графа ваши вчерашние перемещения по городу: из дома на работу, в магазин и т.д. и снова домой. Опишите тип графа. Является ли построенный граф полным? Связным?

2. Постройте граф с тремя вершинами, в котором a, b, c – параллельные ребра, а ребра d, k являются петлями. Ребра a и d не являются смежными.

3. На рисунке изображен граф G. Постройте 6 любых подграфов графа G.



4. Изобразите граф, заданный множеством вершин V = {v1, v2, v3, v4, v5, v6} и множеством ребер ***E*** **=** {e1, ***e2, e3, e4, e5***}, если известно, что вершины v1 и v3 инцидентны ребру ***e2;*** v3 и v4 инцидентны ребру ***e_1;*** v_1 и v_3 инцидентны ребру ***e2;*** v_4 и v_2 инцидентны ребру ***e3; ребро e5 инцидентно вершинам*** v_1 и v_2, а ребро ***e4.***

ЛИТЕРАТУРА

1. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2. Учеб. Пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова.- 6-е изд. М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и образование, 2003. 416 с.
2. Омельченко В.П. Практические занятия по высшей математике / В.П., Омельченко, Э.В Курбатова. Изд.2-е, доп. и перераб. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2005. 350 с.
3. Омельченко В.П. Математика: компьютерные технологии в медицине. / В.П.Омельченко, А.А. Демидова. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2008. 588 с.
4. Гилярова М.Г. Математика для медицинских колледжей. / М.Г. Гилярова. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2011.410 с.

Содержание

Учебно-методическое пособие для обучающихся
по специальностям СПО укрупненной группы специальностей Здравоохранение и медицинские науки
второе издание, переработанное и дополненное
Е.Ю.Скляр

Печать цифровая. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Формат 60х84 $^{1}/_{16.}$
Тираж 100 экз.
Отпечатано в КМЦ «КОПИЦЕНТР»
344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Суворова, 19, тел.247-34-88