Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Ростовский государственный медицинский университет»
Министерства здравоохранения Российской Федерации
КОЛЛЕДЖ

Е.Ю. Скляр

МАТЕМАТИКА

ЧАСТЬ 1

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

учебно-методическое пособие

Ростов-на-Дону
2017

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я7
С 43

Скляр Е.Ю. Математика: в 3-х ч. Часть 1: Математический анализ: учебно-методическое пособие / Е.Ю. Скляр; ФГБОУ ВО РостГМУ Минздрава России, колледж. – 2-е изд., перераб. и доп. – Ростов н/Д: Изд-во РостГМУ, 2017. – 46 с.

Учебно-методическое пособие составлено в соответствии с рабочими программами учебной дисциплины «Математика» и предназначено для самостоятельной (аудиторной и внеаудиторной) работы обучающихся по специальностям СПО укрупненной группы специальностей «Здравоохранение и медицинские науки». В пособии рассмотрены основы дифференциального и интегрального исчисления, дифференциальных уравнений, дискретной математики, теории вероятностей, математической статистики и применение математических методов в профессиональной деятельности среднего медперсонала. Изложение теоретического материала сопровождается примерами и задачами. В конце разделов приводятся задания для самостоятельного выполнения.

Рецензенты:

Караханян К.С., кандидат биологических наук, доцент кафедры медицинской и биологической физики, ФГБОУ ВО РостГМУ Минздрава России.

Артеменко Н.А., замдиректора по НМР, преподаватель высшей квалификационной категории колледжа ФГБОУ ВО РостГМУ Минздрава России.

Утверждено центральной методической комиссией ФГБОУ ВО РостГМУ Минздрава России. Протокол № 2 от 05.10.2017 г.

Рассмотрено и рекомендовано к печати на заседании методического совета колледжа ФГБОУ ВО РостГМУ Минздрава России. Протокол № 1 от 27.09.2017 г.

Одобрено на заседании Цикловой комиссии общегуманитарных, социально-экономических и естественнонаучных дисциплин колледжа ФГБОУ ВО РостГМУ Минздрава России. Протокол 10 от 17.05.2017 г.

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие составлено в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом СПО для обучающихся по специальностям СПО укрупненной группы специальностей Здравоохранение и медицинские науки разделено на 6 модулей, изданных в 3-х частях.

В первой части изложено содержание модуля 1 «Интегральное и дифференциальное исчисление» и модуля 2 «Дифференциальные уравнения и их применение в медицине»

Во второй части - содержание модуля 3 «Основы дискретной математики», модуля 4 «Основы теории вероятностей», модуля 5 «Математическая статистика».

В третьей части - содержание модуля 6 «Применение математических методов в профессиональной деятельности среднего медперсонала».

Каждый модуль содержит краткую теоретическую часть и упражнения для практических занятий. По модулям 4 и 5 разработаны 3 лабораторные работы.

Учитывая профессиональную направленность курса математики, во всех модулях приведены примеры и предложены задачи из области фармакологии, биологии, медицины.

Настоящая брошюра представляет собой первую часть учебного пособия, в котором рассматриваются основные понятия интегрального и дифференциального исчисления, также простейшие дифференциальные уравнения. На конкретных примерах (простейшие модели фармакокинетики, микробиологические задачи) и в контрольных заданиях показано, как аппарат высшей математики используется для описания медико-биологических процессов.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ 3
МОДУЛЬ 1 6
ИНТЕГРАЛЬНОЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ 6
1. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ 6
1.1. Понятие предела в данной точке 6
1.2Понятие бесконечно малой величины 7
1.3. Основные теоремы о пределах 7
1.4. Некоторые приемы вычисления пределов функций 8
1.5. Задания для самостоятельного решения 10
2. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ 12
2.1. Определение производной 12
2.2. Геометрический смысл производной 13
2.3. Физический смысл производной 13
2.4. Основные правила дифференцирования 14
2.4. Производная сложной функции. 15
2.6. Применение производной для решения прикладных задач 15
2.7. Задания для самостоятельного решения 16
3.ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ 18
3.1. Свойства дифференциала. 18
3.2. Задания для самостоятельного решения. 18
4. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ 19
5. ЧАСТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ И ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ 20
6. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ И ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 22
6.1. Первообразная функция и неопределенный интеграл 22
6.2. Основные свойства неопределенного интеграла 23
6.3. Основные методы интегрирования 24
6.3.1. Метод непосредственного интегрирования 24
6.3.2. Интегрирование методом замены переменной 25

6.4. Задания для самостоятельного решения 26
6.5.Определенный интеграл 27
6.6.Свойства определенного интеграла 28
6.7.Связь между определенными и неопределенными интегралами. . 29
6.8. Использование определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур 29
Задания для самостоятельного решения 30
МОДУЛЬ 2 31
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕУРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В МЕДИЦИНЕ 31
7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 31
7.1Дифференциальное уравнение, его порядок и его решение 31
7.2Этапы решения задач при использовании дифференциальных уравнений 33
7.3. Примеры использования дифференциальных уравнений 34
7.4. Задания для самостоятельного решения 38
Эталоны ответов 39
ПРИЛОЖЕНИЕ 1 41
ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. 41
Числовая последовательность. Предел последовательности. Теоремы о пределах числовой последовательности. 41
ПРИЛОЖЕНИЕ 2 44
План исследования функции. 44
Построение графика функции с помощью производной. 44
Алгоритм исследования функции. 44
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 46

Математика-
это искусство давать
разным вещам одно наименование.
А.Пуанкаре

МОДУЛЬ 1

ИНТЕГРАЛЬНОЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

1.1. Понятие предела в данной точке

Понятие предела является основой математического анализа.

Теория пределов позволяет определить характер поведения функции y =f(x) при заданном изменении аргумента. Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки $x = x_0$, за исключением, быть может, самой точки x_0.

Число А называется пределом функции y =f(x)в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое положительное число δ, что для любого $x \neq x_0$, удовлетворяющего неравенству $| x - x_0 | < \delta$, выполняется соотношение $| y - A | < \varepsilon$

То, что функция y =f(x) в точке x_0 имеет предел, равный А, обозначают следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Геометрически существование данного предела означает, что каково бы ни было $\varepsilon>0$, найдется такое число δ, что для всех х заключенных между $x_0 + б$, и $x_0 - \delta$ (кроме, быть может, самой точки x_0), график функции ***y = f(x)*** лежит в полосе, ограниченной прямыми $y = A + \varepsilon$ и $y = A - \varepsilon$ (рис.1)

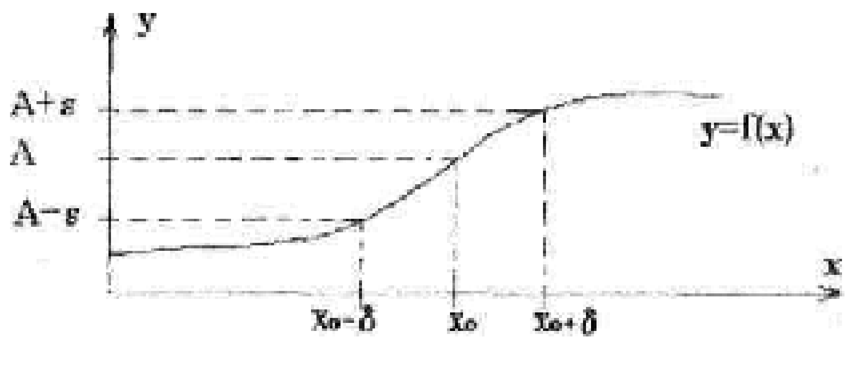


Рисунок 1

Таким образом, понятие предела функции дает возможность ответить на вопрос, к чему стремятся значения функции, когда значения аргумента стремятся к x_0.

Число А называют пределом функции ***y = f(x)*** при х, стремящимся к x_0, если разность ***f(x) – A*** по абсолютной величине есть величина бесконечно малая.

1.2Понятие бесконечно малой величины

В природе существует много таких переменных величин, которые в процессе своего изменения неограниченно приближаются к нулю. Таким величинам присвоено специальное название - "бесконечно малые" величины. Бесконечно малые играют важную роль в математическом анализе, который поэтому часто называют анализом бесконечно малых.

Переменная величина $\mathbf{x_n}$, называется бесконечно малой, если она в процессе изменения становится и затем остается по абсолютной величине меньше любого, наперед заданного, сколько угодно малого положительного числа, т.е. $\mathbf{x_n < \varepsilon}$ (ε- эпсилон).

Рассмотрим колебание математического маятника.

Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на тонкой, невесомой, нерастяжимой нити.

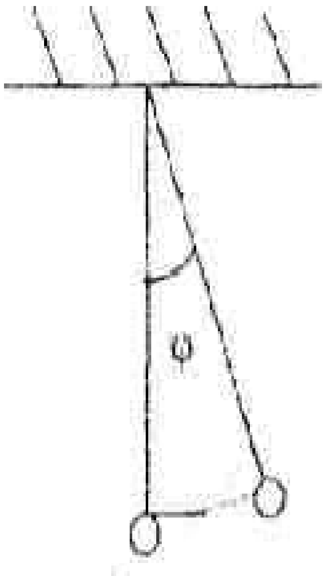


Рисунок 2

Пусть в начальный момент времени маятник отклонен от положения равновесия на угол φ = 15°. Если маятник отпустить, то он будет совершать колебания. Из-за сопротивления среды амплитуда колебания маятника будет постепенно уменьшаться; поэтому какое бы положительное число ни было задано, угол φ по абсолютной величине станет, и впредь будет оставаться меньше φ. Следовательно, угол φ в данном процессе является бесконечно малой величиной. Примерами бесконечно малой величины являются: масса тающей в воде льдины, разность уровней однородной жидкости в сообщающихся сосудах и т.д.

1.3. Основные теоремы о пределах

Рассмотрим некоторые теоремы о пределах, которые в дальнейшем будут использованы для нахождения пределов функций, представленных в виде алгебраических выражений.

Предполагается, что все функции в приведенных ниже теоремах имеют пределы.

Теорема 1.

Если предел функции в точке существует, то он единственный.

Теорема 2.

Предел постоянной величины равен самой постоянной.

$$\lim_{x \to x_0} \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}$$

Теорема 3.

Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен сумме их пределов.

$$\lim_{x \to x_0} (\boldsymbol{f}(x) + \boldsymbol{g}(x)) = \lim_{x \to x_0} \boldsymbol{f}(x) + \lim_{x \to x_0} \boldsymbol{g}(x)$$

Теорема 4

Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Следствие.

Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

$$\lim_{x \to x_0} C \cdot f(x) = C \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Теорема 5.

Предел отношения двух функций равен отношению их пределов, если предел делителя отличен от нуля.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}, \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$$

1.4. Некоторые приемы вычисления пределов функций

Вычислим пределы функций с помощью вышеприведенных теорем.

<u>*Пример*</u>

$$\lim_{x \to 2}(4x^2 - 6x + 3)$$

Используя теоремы о пределах 3,4,2 , находим:

$$\lim_{x \to 2}(4x^2 - 6x + 3) = 4\lim_{x \to 2} x^2 - 6\lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 3 = 4 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 3 = 7$$

Иногда встречаются ситуации, **когда числитель и знаменатель дроби стремится к нулю. В этом случае говорят, что имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$**. Для нахождения таких пределов необходимо числитель и знаменатель разложить на множители.

<u>*Пример*</u>

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4}$$

Применяя теорему 4, имеем:

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} = \frac{16 - 24 + 8}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$

Для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$, разложим числитель на множители :

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 2) \cdot (x - 4)$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-2)\cdot(x-4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x-2)=2$$

Пример

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x}$$

Здесь также имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия умножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}$. Получим :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}\right)\cdot\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right)}{x\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-x-(2+x)}{x\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}}=\frac{-2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Пример

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{3x^2-x+4}-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

(умножаем числитель и знаменатель на выражение, сопряжённое знаменателю)=

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\left(\sqrt{3x^2-x+4}+2\right)}{3x^2-x+\underline{4}-\underline{4}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\left(\sqrt{3x^2-x+4}+2\right)}{x(3x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sqrt{3x^2-x+4}+2\right)}{3x-1}=\left(\frac{2\cdot\sqrt{0-0+4}+2}{3\cdot 0-1}\right)=\frac{6}{-1}=-6$$

Если при вычислении пределов возникает неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$, то в этом случае числитель и знаменатель необходимо разделить на x с наибольшим показателем степени.

Пример

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-6x+1}{5x^2-4}$$

Имеет место неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$

Разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{6x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}=\frac{5-0+0}{5-0}=1$$

1.5. Задания для самостоятельного решения

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2 - 7x + 6)$
2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5x+2}{3x+1}$
3. $\lim\limits_{x\to 3}(\sqrt{x+13} - \sqrt{x-2})$
4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x-3}{2x-1}$
5. $\lim\limits_{x\to 1}(15x^2 - x + 14)$
6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x^2-2x+1}$
7. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^3-4} - \sqrt{x-2}$
8. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x}$
9. $\lim\limits_{x\to 1}(5x^2 - 3x + 7)$
10. $\lim\limits_{x\to 2}(4x^2 - x + 4)$
11. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2-2x+1}$
12. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^3+5x+3}$
13. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+4}$
14. $\lim\limits_{x\to 1}(3 + 2x + x^2 - 4x^3)$
15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-3}{2x-1}$
16. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$
17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2}{1+2x^2}$
18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7}{2x^2+1}$
19. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$
20. $\lim\limits_{x\to 1}(9x^2 - 6x + 8)$
21. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4}{x-2}$
22. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2+4x-x}$
23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2}{1+2x^2}$
24. $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2 - 3x + 9)$
25. $\lim\limits_{x\to 1}(4x^3 - 2x^2 + 2x + 3)$
26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4} - \sqrt{15-x+1}}{x^2+1}$
27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$
28. $\lim\limits_{x\to 2}(6x^3 + 2x^2 - 3x + 7)$
29. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$
30. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-2x-3}{x^3+3x+3}$
31. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x+2}{2x+3}$
32. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{10x+2^x}{2x+3}$
33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x-3}{5-3^x}$
34. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{2x^2-x+1}$
35. $\lim\limits_{x\to 1}5x^3 - 2x + 4$
36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-x}{6^x+1}$
37. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2x+10^x} - \sqrt{2x+4}$
38. $\lim\limits_{x\to 7}(x^2 - 3x + 1)$

Используя разложение функций на множители, найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$

7) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{3x-9}$

13) $\lim\limits_{x\to4}\frac{3x-x^2+4}{x^2-2x-8}$

2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2+5x-6}$

8) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$

14) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}$

3) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$

9) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$

15) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$

4) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$

10) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-27}{3-x}$

16) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$

5) $\lim\limits_{x\to3}\frac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$

11) $\lim\limits_{x\to10}\frac{x^2-100}{10-x}$

17) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

6) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-9}$

12) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$

18) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$

Используя деление на аргумент, найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-7x+10}{3x^2-25}$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x+12x^3}{x^2-x+4x^5}$

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+14x^3}{1+2x+7x^3}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+4x+1}{5x^3+2}$

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2-x-1}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x-2}{x^2-x+4}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+15x^2}{1+2x+5x^2}$

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+1}{2x^2-3x}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-2}{x^2-5x+7}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^3-x^2+3}$

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-2}{x^2+2x-4}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{5x^2-2x+1}$

15) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x^3+5x-1}{x^3-1}$

Умножая на сопряженное выражение, найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{2x+1}}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4}$

7) $\lim\limits_{x\to6}\frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$

2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+4x}-1}{x}$

5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$

8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2-\sqrt{2x+4}}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x^2+39}-8}{x-5}$

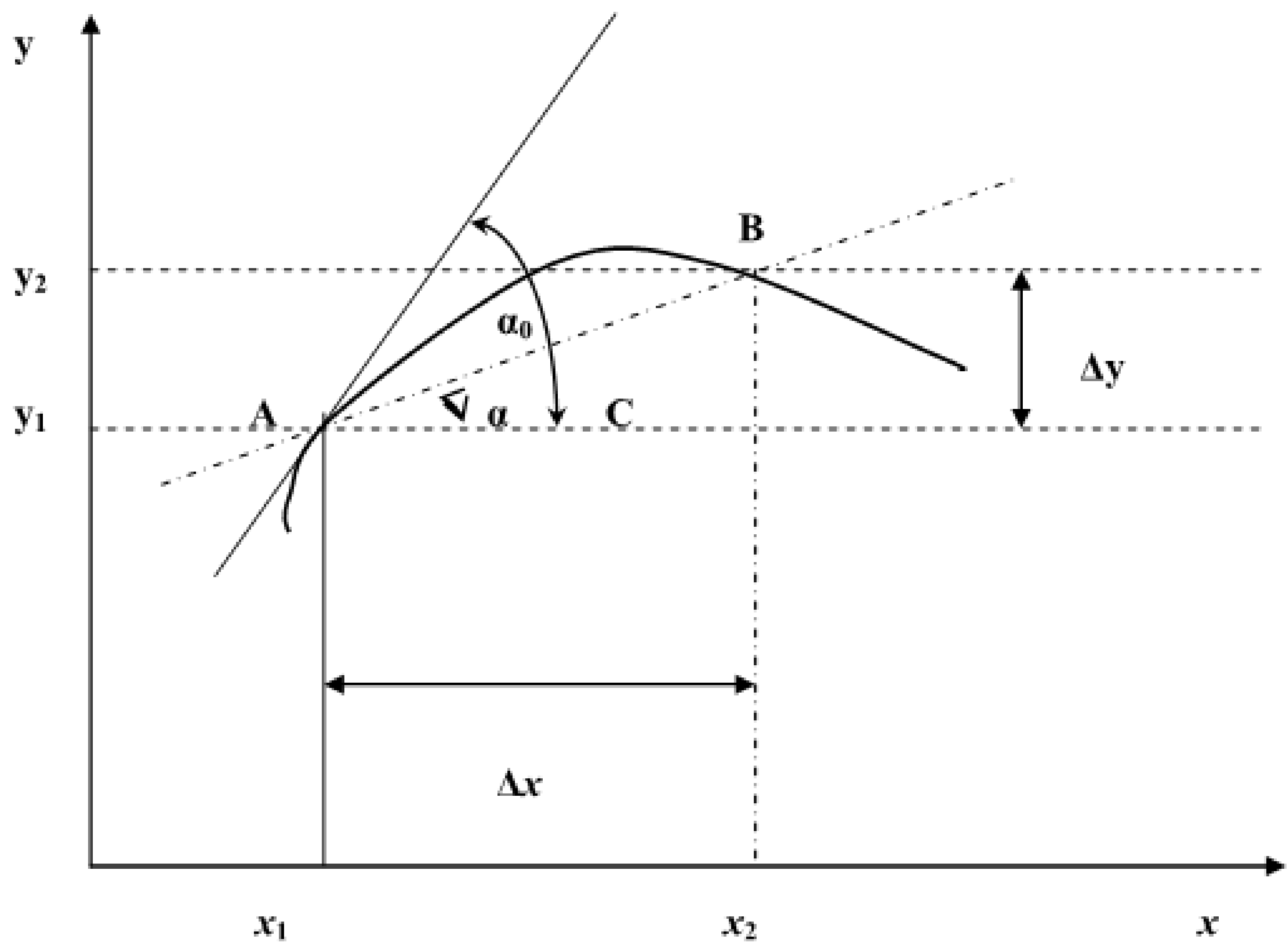
6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

9) $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

2. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

2.1. Определение производной

Количественное описание сложных изменяющихся процессов жизнедеятельности с помощью элементарной математики невозможно, поскольку соответствующие математические величины, используемые для этой цели, должны сами обладать способностью к «движению». Высшая математика, отличие от элементарной математики, оперирует зависимостями и величинами, подверженными изменениям, происходящим по определенным законам. Величиной, определяющей темп изменения функциональных зависимостей в высшей математике, является **производная функции**. Для пояснения этого понятия рассмотрим рисунок, где графически представлена некоторая произвольная функциональная зависимость y=f(x).



Отметим на графике некоторые значения аргумента x_1 и x_2, разница между которыми есть **приращение** аргумента: $\Delta x = x_2 - x_1$. Приращение функции: $\Delta y = y_2 - y_1$.

Для непрерывных функций, если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta y \to 0$. То, к чему при неограниченном убывании Δx стремится отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, зависит от конкретного вида функции и характеризует темп ее изменения.

Производной функции в данной точке называют предел отношения приращения функции к приращению аргумента, если приращение аргумента стремится к нулю.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{или } \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

2.2. Геометрический смысл производной
Из рисунка видно, что отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{BC}{AC} = tg\alpha,$$

Где α-угол наклона секущей AB к оси абсцисс. Если же Δx неограниченно убывает (x_2 стремится к x_1), то секущая вырождается в касательную к графику функции в точке A, имеющую угол наклона к оси абсцисс α_0:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha_0$$

Таким образом, тангенс угла между касательной, проведенной к графику функции в данной точке, и осью абсцисс, численно равен значению производной функции в данной точке. В этом и состоит геометрический смысл производной.

2.3. Физический смысл производной
Рассмотрим механическое движение.
Если за время Δt тело проходит путь ΔS, то средняя за это время скорость движения:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Но на пути ΔS скорость может иметь различные мгновенные значения **($v_{\text{мгн}}$)**, которые определяются как предел отношения ΔSк Δt при $\Delta t \to 0$:

$$v_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$$

Следовательно, мгновенная скорость движения в данной точке представляет собой значение в данный момент времени производной от пути по времени**.**
Итак, ***производная имеет смысл скорости некоторого процесса.***

Если рассматривается ускорение (а) механического прямолинейного движения, то мгновенное ускорение представляет собой первую производную от скорости или вторую производную от пути:

$$a_{\text{мгн}} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dS}{dt}\right) = \frac{d^2S}{dt^2}$$

Таким образом, ***вторая производная имеет физический смысл ускорения***.

Производные элементарных функций

1.	$(x^n)'=nx^{n-1}$	**8.**	$(tgx)' = \frac{1}{cos^2 x}$
2.	$(ln\,x)' = \frac{1}{x}$	**9.**	$(\text{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
3.	$(a^x)'=a^x lna$	**10.**	$(\text{arcsin}x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4.	$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$	**11.**	$(\text{arcos}\,x)'= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5.	$(e^x)' = e^x$	**12.**	$(\text{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}$
6.	$(\sin x)' = cos\,x$	**13.**	$(\text{arcctg}x)'=-\frac{1}{1+x^2}$
7.	$(cos\,x\,)' = -\,sin\,x$	**14.**	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

2.4. Основные правила дифференцирования

1. Производная постоянной величины равна нулю: $(c)' = 0$, *где С- постоянное число*
2. Производная аргумента по самому аргументу равна единице: $(x)'=1$
3. Производная алгебраической суммы дифференцируемых функций равна алгебраической сумме производных этих функций: $(u\pm v)'= u' \pm v'$
4. Производная произведения двух дифференцируемых функций равна сумме произведений: производной первой функции на вторую функцию и производной второй функции на первую функцию: $(uv)'= u'v + uv'$
5. Производная частного двух функций равна дроби, знаменатель которой равен квадрату знаменателя дифференцируемой функции, а числитель есть разность меду произведениями производной числителя на знаменатель и производной знаменателя на числитель: $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$
6. Постоянный множитель можно выносить за знак производной: $(cu)'=cu'$

2.4. Производная сложной функции.

Функция y от x называется ***сложной*** функцией, если ***y=f(u), где u=φ(x),***(т.е. если y зависит от xчерез промежуточный аргументu), то

Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной:

$$y' = f'(u) \cdot u'(x)$$

Некоторые формулы таблицы производных теперь будут иметь вид:

$$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u',$$

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

Примеры.

Вычислить производные сложной функции.

1. $((x^3 + x^2 + 6)4)' = 4(x^3 + x^2 + 6)3(3x^2 + 2x)$
2. $(\sqrt{3x^2 + 2x})' = \frac{6x+2}{2\sqrt{3x2 + 2x}} = \frac{3x+1}{\sqrt{3x2 + 2x}}$
3. $(\sin^3 2x)' = 3 \sin^2 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 = 6 \sin^2 2x \cdot \cos 2x$
4. $(\ln\log 2\ (8x+1))' = \frac{1}{\log 2\ (8x+1)} \cdot \frac{1}{\ln 2\ (8x+1)} \cdot 8$
5. $(e^{tgx^4})' = e^{tgx^4} \cdot \frac{1}{\cos^2 x^4} \cdot 4x^3$

2.6. Применение производной для решения прикладных задач

Пример.

В результате значительной потери крови содержание железа в крови уменьшилось на 210мг. Недостаток железа вследствие его восстановления с течением времени t уменьшается по закону $\boldsymbol{y = 210e^{-\frac{t}{7}}}$ мг в сутки. Найти зависимость скорости восстановления железа в крови от времени. Вычислить эту скорость в момент времени t=0 и через 7 суток.

Решение.

Скорость восстановления железа:

$$\boldsymbol{y' = -\frac{1}{7} 210e^{-\frac{t}{7}} = -30e^{-\frac{t}{7}}}$$

Знак « - » указывает на уменьшение недостачи.

При t=0 скорость восстановления равна -30мг/сутки.

Через 7 суток скорость восстановления равна:

$$\boldsymbol{y'_{t=7} = -30e^{-\frac{7}{7}} = -30e^{-1} = -\frac{30}{2,7} = -11,1} \text{ мг/сутки}$$

2.7. Задания для самостоятельного решения

1. Зависимость массы вещества, которую получают в результате некоторой химической реакции, от времени tопределяется формулой M=7(1+2e^{-5t}). Определить скорость этой реакции.
2. Пусть численность популяции бактерий описывается функцией P(t)=2000+100t^2, где t-время, измеряемое в часах. Определить скорость роста популяции и значение скорости через 10 часов.
3. Концентрация раствора изменяется с течением времени по закону: C=$\frac{300t}{1+5t}$.

   Найти скорость растворения.

Вычислить производную функции:

1. $y = \frac{x^2}{4} + 3x \quad - 6$
2. $y = \frac{x^3}{3} + 4x^2 \ - 5$
3. $y = \frac{x^4}{4} - 6x^3 \ + 3$
4. $y = \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{5}{2\ \sqrt{x}} - \frac{3}{x}$
5. $y = \sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}} \ - \frac{1}{x^2} + \ \frac{1}{3x^3}$
6. $y = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} \ + \ \frac{3}{2\ \sqrt{x}} + \ \frac{1}{3x^2}$
7. $y = \frac{5x^3}{x+1}$
8. $y = \frac{6x^4}{x^2+2}$
9. $y = \frac{4x^2}{x^3+1}$
10. $y = x^2 \sin x + \sqrt{x}$
11. $y = x\operatorname{tg} x - 2^x$
12. $y = 5^x + x^3 \operatorname{tg} x$

Вычислить производные сложной функции.

13. $y = \frac{1- \ \sqrt{x}}{1+ \ \sqrt{x}}$
14. $y = \frac{\sqrt{x}}{1+ \ \sqrt{x}}$
15. $y = \frac{(1+ \ \sqrt{x})^2}{x}$
16. $y = 4e^{5x-1} + e^{-x}$
17. $y = 5e^{1-4x} - e^{-x}$
18. $y = 6e^{7x-1} + e^{-x}$
19. $y = \frac{\ln x + x}{x}$
20. $y = \ln \frac{x^2}{1-x^2}$
21. $y = \ln\cos x$
22. $y = \frac{1}{4}\sin^4 2x$
23. $y = \frac{1}{2}\cos^3 5x$
24. $y = \frac{1}{\cos 5x}$

25. $y = \sqrt{x^2 + 5x}$

26. $y = \sqrt[3]{x^4 + 4x}$

27. $y = \sqrt[4]{(x^3 + 8x)^3}$

28. $y = \frac{\sqrt[3]{x^4+4x}}{x}$

29. $y = x\sqrt[4]{x^4 + 4x}$

30. $y = (9x3+14x4-18)^6$

31. $y = \log^3\sqrt{x^2 + 5x}$

32. $y = \lg\frac{7x-1}{7x+1}$

33. $y = \log\sqrt[4]{(x^3 + 8x)^3}$

34. $y = \ln 5x$

35. $y = \ln^3 x^4$

36. $y = \ln^2 x + 4^{\sqrt{x}}$

37. $y = \frac{\ln(2x+8)}{x^2+7}$

38. $y = \ln\log^3(x^3 + x^2)$

39. $y = \ln\ln(2x+1)$

40. $y = \ln\sin e^x$

41. $y = \ln\cos\frac{1}{x}$

42. $y = \lg\frac{tgx-1}{tgx+1}$

43. $y = 0,3(\ln tg2x + \ln\cos^2 3x)$

44. $y = 0,5(e^{3x} + e^{-3x})$

45. $y = e^{-5x}\cdot 7^{-x^2}$

46. $y = \sqrt{\sin x}\cdot e^{\sqrt{\sin x}}$

47. $y = \sin^3 x\cdot e^{x^4}$

48. $y = \sqrt{\sin x}\cdot e^{\sqrt{\sin x}}$

49. $y = \frac{tg\ln x}{e^x}$

50. $y = \frac{5}{\arccos 2x}$

51. $y = 3^{\arcsin 9x}$

52. $y = \sqrt{e^x + x^2}$- $a\cos\sqrt{e^x + x^2}$

53. $y = arcctg\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$

54. $y = \arcsin(3\ln 2x)$

3.ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Дифференциал функции (*dy*) - это произведение производной функции на приращение (или дифференциал) аргумента:

$$\Delta y = y' \Delta x = y' dx$$

Аналитический смысл дифференциала заключается в том, что дифференциал dy представляет собой главную часть приращения функции, линейную относительно приращения аргумента Δx. При малых приращениях можно считать $dy \approx \Delta y$.

3.1. Свойства дифференциала.

Пусть некоторые дифференцируемые функции, **с** - вещественное число.

1. $dc = 0$
2. $d(u+v) = du + dv$
3. $d(cu) = c \cdot du$
4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$
5. $d(uv) = vdu + udv$
6. $df(u) = f'(u)du$, *где* $u = \varphi(x)$

Пример. Вычислить значение дифференциала функции $f(x) = x^3 + 2x$

$df = f'(x)dx = (3x^2 + 2)dx$

Из смысла дифференциала следует его важное практическое значение. Нахождение дифференциала функции позволяет определить, насколько изменилась функция, если произошли небольшие изменения переменной, от которой она зависит.

Пример. Имеется куб с длиной ребра l=1м. На какую величину ΔV изменится объем куба, если длина ребра увеличилась на Δl =1см?

Эту задачу можно, конечно решить и методами элементарной математики: $\Delta V = (l + \Delta l)^3 - l^3$

Однако даже в этом элементарном примере необходимо выполнять довольно значительные вычисления. Учитывая, что приращение объема куба (функции) при малых изменениях длины его ребра (аргумента) примерно равно дифференциалу объема, получим: $\Delta V \approx dV = (l^3)' \cdot \Delta l = 3l^2 \Delta l = 3 \cdot 1 \cdot 0{,}01 = 0{,}03$м^3.

3.2. Задания для самостоятельного решения.

Найти дифференциал функции:

1) $y = (10x+5)^3$ 2) $y = \frac{x^{10}}{10}$ 3) $y = \frac{1}{5x+1}$ 4) $y = x^2\sqrt{x-1}$ 5) $y = \ln\frac{1}{1-5x}$

6) $y = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}$ 7) $y = 4e^{5x-1}$ 8) $y = \sin(2x-1)e^{ax}$ 9) $y = \frac{1}{3}\cos^3 2x$ 10) $y = x(1-\ln\frac{x}{a})$

4. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Понятие производной было введено для функции одной переменной. Но чаще возникает необходимость количественного описания процессов, которые зависят от целого ряда параметров. Обозначим, например, состояние организма как некоторую функцию *U*. Очевидно, что она зависит от целого ряда параметров: x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n. Здесь x_1может означать температуру тела, x_2- систолическое давление, x_3 - содержание гемоглобина в крови и т.д. Задача выбора информативных и доступных измерению параметров и, особенно, установления характера функциональной зависимости $U(x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n)$ весьма сложна. Однако, совершенно очевидно, что математический аппарат для описания процессов жизнедеятельности должен базироваться на применении и исследовании функций многих переменных. Каким образом в этом случае трансформируется понятие производной функции? Для этого вводится понятие частной производной.

Частная производная характеризует скорость изменения функции по одной из независимых переменных, в то время как остальные переменные считаются неизменяющимися. *Частная производная от функции U(x,y) по переменной x:*

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial x} = \lim_{x\to 0}\frac{U(x+\Delta x, y) - U(x,y)}{\Delta x}$$

представляет предел дроби. В числителе этой дроби стоит разность значений функции *U* при “наращенном” $(x + \Delta x)$ и прежнем (x) значениях аргумента. В знаменателе же - значение приращения $\Delta x \to 0$.

Аналогично, частная производная функции *U (x,y)* по переменной *y*:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial y} = \lim_{y\to 0}\frac{U(x, y+\Delta y) - U(x,y)}{\Delta y}$$

Нахождение частных производных (дифференцирование функций многих переменных), не представляет особых сложностей.

Пример.

Найти частные производные функции $U = x^3 siny$.

Находя частную производную от функции *U* по *x*, переменную *y* считаем зафиксированной, т.е. обращаемся со множителем *sin y* как с постоянной величиной:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2\mathrm{sinx}$$

Аналогично, при прохождении частной производной по *y* постоянным считаем множитель x^3и находим производную от *sin y*:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^3\cos \mathrm{y}$$

5. ЧАСТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ И ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Возьмем, для упрощения, функцию двух переменных: $U(x,y)$. Частным дифференциалом по x (обозначение d_xU) называют произведение ее частной производной по x на дифференциал аргумента dx:

$$d_xU = \frac{\partial U}{\partial x} dx$$

Второй частный дифференциал:

$$d_yU = \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

Частные дифференциалы позволяют оценивать, насколько изменится значение функции, если изменится на небольшую величину один из соответствующих ее аргументов.

Сумма всех частных дифференциалов называется полным дифференциалом. Для функции $U(x,y)$ ее полный дифференциал (dU) равен:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

Нахождение полного дифференциала позволяет оценить, насколько изменится значение функции при изменении всех переменных, от которых она зависит.

Пример.

Несколько усложним уже рассматривавшуюся задачу по нахождению изменения объема куба при увеличении длины его ребра. Возьмем параллелепипед с длинами ребер: $l_1=1$*м*, $l_2=2$*м*, $l_3=3$*м*. Пусть первые два ребра увеличились на: $\Delta l_1=0{,}01$*м*, и $\Delta l_2=0{,}02$ *м;* а третье ребро уменьшилось на: $\Delta l_3= -0{,}01$*м*. На какую величину ΔV изменится объем V параллелепипеда?

Решение этой задачи может быть выполнено и без применения аппарата высшей математики: $\Delta V=(l_1+\Delta l_1)\ (l_2+\Delta l_2)\ (l_3+\Delta l_3) - l_1\cdot l_2\cdot l_3$.

Однако, использование полного дифференциала позволяет существенно упростить решение и вычисление сделать минимальными. Поскольку изменения длин ребер не велики по сравнению с их первоначальными значениями, будем считать, что искомое приращение ΔV объема V (функции трех переменных - длин ребер) примерно равно полному дифференциалу dV:

$$\Delta V \approx dV = d\ (l_1 l_2 l_3)\ = \frac{\partial V}{\partial l_1}\Delta l_1 + \frac{\partial V}{\partial l_2}\Delta l_2\ + \frac{\partial V}{\partial l_3}\Delta l_3$$

Найдя частные производные и подставив численные значения, получим:

$dV = l_2 \cdot l_3 \Delta l_1 + l_1 \cdot l_3 \cdot \Delta l_2 + l_1 \cdot l_2 \cdot \Delta l_3 = 2 \cdot 30{,}01 + 1 \cdot 3 \cdot 0{,}02 - 1 \cdot 20{,}01 = 0{,}1^3$.

Теперь рассмотрим **более сложный пример**, **иллюстрирующий применение частных производных для рассмотрения задач фармакологии**.

Упрощенно, будем считать, что реакция организма на введенный лекарственный препарат зависит от величины его дозы x и времени t, прошедшем после введения. То есть, реакцию организма будем характеризовать некоторой функцией $R(x,t)$. Допустим, далее, что эта функция имеет вид: $R(x,t) = x^2 (a-x)\, t^2 e^{-t}$. (*)

Здесь a - некоторый постоянный коэффициент, который считается известным. Отметим, что уравнения, реально используемые для математического описания фармакокинетики, имеют существенно более сложный вид. Входящие в них аргументы и постоянные коэффициенты учитывают не только величину дозы и время, но и возраст пациента, его конституционные особенности, тип нервной деятельности и др. Тем не менее, на упрощенном примере, когда реакция организма задается данным уравнением, покажем, что использование частных производных позволяет ответить на практически важные вопросы:

1) **при какой дозе x реакция организма окажется максимальной?**

2) **когда она наступит?**

Математически, задача сводится к нахождению экстремумов функции $R(x,t)$. Для нахождения максимальной дозы (максимума по x) необходимо найти частную производную $\frac{\partial R}{\partial x}$, приравнять ее к нулю и решить полученное уравнение:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = (2a - x - 3x^2)t^2 e^{-t} = 0$$

Уравнение имеет два корня: $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{2a}{3}$. Первый из них соответствует минимуму реакции организма (если доза равна нулю - ничего не вводили), а второй - максимуму. В справедливости этого утверждения легко убедиться и чисто математически, используя правила различения максимума и минимума при исследовании функций на экстремум. Таким образом, зная коэффициент a, определим дозу лекарства, обеспечивающую максимальную реакцию: $x = \frac{2a}{3}$. Для нахождения времени наступления этой максимальной реакции найдем частную производную $\frac{\partial R}{\partial t}$ и опять решим соответствующее уравнение относительно t: $\frac{\partial R}{\partial t} = (2x - 3x^2)\, 2\, te^{-t} - (2ax - 3x^2)\, t^2 e^{-t} = 0$. Уравнение имеет корни $t_1 = 0$, $t_2 = 2$. По смыслу задачи и из математического анализа, следует, что первый корень ($t_1 = 0$) соответствует минимуму реакции, а второй - максимуму. Если, например, в уравнении (*) время определялось в часах, то максимальная реакция наступит через 2 часа.

6. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ И ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

6.1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

В элементарной математике сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в степень и извлечение корня - примеры взаимообратных операций. Взаимообратные операции существуют и в высшей математике. Дифференцирование (нахождение производной) позволяет по некоторой заданной функции найти скорость ее изменения. Операцией, обратной дифференцированию, является интегрирование - нахождение самой функции (первообразной) по заданной скорости ее изменения.

Первообразной *для заданной функции* f(x) *называется функция F(x), имеющая своей производной функцию f(x) или f(x)dx своим дифференциалом.*

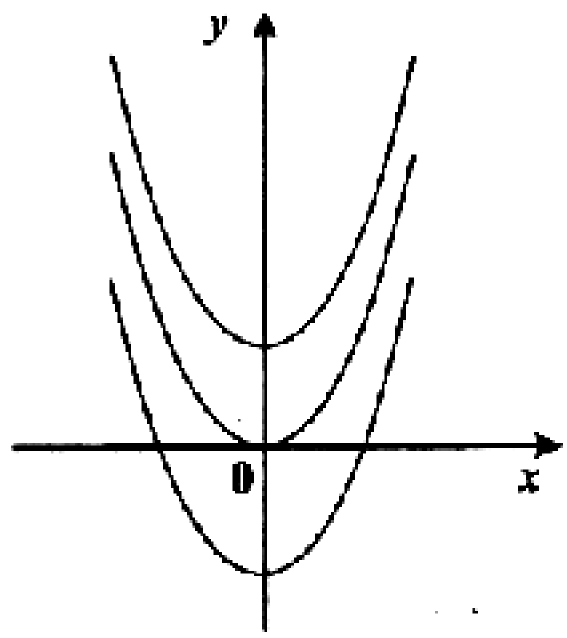
Известно, что производная постоянной величины равна нулю, поэтому функции f(x)будет соответствовать множество первообразных функций F(x), отличающихся друг от друга постоянной величиной. Совокупность таких функций называется неопределенным интегралом для функции *f(x).*

Неопределенным интегралом *называется совокупность всех функций F(x) + C, первообразных для данного дифференциала f(x)dx и обозначается:*

$\int f(x)dx = F(x) + C$, *где f(x)dx— подынтегральное выражение, f(x) — подынтегральная функция (читается: интеграл эф от икс дэ икс).*

Вычисления интеграла от данной функции называется *интегрированием* этой функции.

Геометрический смысл неопределенного интеграла − это семейство кривых, соответствующих возможным значениям постоянной интегрирования C.



6.2. Основные свойства неопределенного интеграла

1 Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$$

2 Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

3 Интеграл от дифференциала первообразной равен самой первообразной и дополнительному С:

$$\int F(x)dx = F(x) + C$$

4 Интеграл алгебраической суммы функции равен сумме интегралов от каждой из них:

$$\int (f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + ... + \int f_n(x)dx$$

5.Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

Приведем таблицу основных (табличных) интегралов, проверить их можно путем дифференцирования.

Таблица интегралов

1. $\int dx = x + C$	**2.** $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	**4.** $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int e^x dx = e^x + C$	**6.** $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	**8.** $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$	**10.** $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctg\dfrac{x}{a} + C$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	**12.** $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + C$

6.3. Основные методы интегрирования

6.3.1. Метод непосредственного интегрирования

Этот метод заключается в преобразовании подынтегрального выражения к виду, представляющему собой линейные комбинации табличных интегралов.

Примеры.

Найти неопределенный интеграл: $\int(3x^2+a^x)dx$

Решение.

Согласно свойствам интеграла представляем его в виде суммы интегралов, вынося постоянный множитель за знак интеграла, после чего используем табличные интегралы:

$$\int(3x^2+a^x)dx=3\int x^2dx+\int a^x dx=\frac{3x^3}{3}+C_1+\frac{a^x}{\ln a}+C_2=x^3+\frac{a^x}{\ln a}+C$$

Найти интегралы:

1.

$$\int\left(\frac{3}{2}x^2+6x-\frac{1}{5}\right)dx=\int\frac{3}{2}x^2dx+\int 6x\,dx-\int\frac{1}{5}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int x^2dx+6\int x\,dx-\frac{1}{5}\int dx=\frac{3}{2}\frac{x^3}{3}+6\frac{x^2}{2}-\frac{1}{5}x+C=\frac{x^3}{2}+3x^2-\frac{x}{5}+C.$$

2.

$$\int\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{x\sqrt[4]{x}}+\frac{5}{x^2}\right)dx=\int\left(2x^{-\frac{2}{3}}+x^{-\frac{5}{4}}+5x^{-2}\right)dx=$$

$$=2\int x^{-\frac{2}{3}}dx+\int x^{-\frac{5}{4}}dx+5\int x^{-2}dx=2\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}+\frac{x^{-\frac{1}{4}}}{-\frac{1}{4}}+5\frac{x^{-1}}{-1}+C=6\sqrt[3]{x}-\frac{4}{\sqrt[4]{x}}-\frac{5}{x}+C.$$

3. $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)dx=\int\left(e^x+\frac{1}{x}\right)dx=\int e^x dx+\int\frac{dx}{x}=e^x+\ln x+C.$

4. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{5}{1+x^2}\right)dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+5\int\frac{dx}{1+x^2}=\arcsin x+5\,arctg\,x+C.$

5. $\int\left(2\sin x-\frac{3}{\cos^2 x}\right)dx=2\int\sin x\,dx-3\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-2\cos x-3tg\,x+C.$

6.3.2. Интегрирование методом замены переменной

В некоторых случаях введение новой переменной интегрирования может свести подынтегральное выражение к табличному интегралу. Такой прием носит название *метод подстановки,* или *метод замены переменной.*

Имеются два варианта замены переменной:

1. $\int f(x)dx = \int f[\varphi(u)]\varphi'(u)du$, где $x = \varphi(u)$

2. $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(u)du$, где $\varphi(x) = u$

Применение того или иного варианта зависит от возможности приведения подынтегрального выражения к табличному виду. Выполнив интегрирование, необходимо сделать обратную замену, выразив первообразную через первоначальную переменную интегрирования.

Примеры

Вычислить интегралы способом замены переменной.

1. $\int (2x+1)^4 dx$

Решение. Введем новую переменную $u=2x+1$, тогда

$\mathrm{du} = (2\mathrm{x}+1)'\mathrm{dx};\ \mathrm{du} = 2\mathrm{dx};\ \mathrm{dx} = \frac{du}{2}$. Подставим эти значения в интеграл.

$$\int u^4 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^4 du = \frac{1 \cdot u^5}{2 \cdot 5} + C = \frac{u^5}{10} + C$$

Сделаем обратную замену: $\frac{u^5}{10} + C = \frac{(2x+1)^5}{10} + C$.

В этом примере был применен первый вариант замены.

2. $\int \frac{x^4 dx}{x^5 + 4}$

Решение.

Обозначим новую переменную: $x^5+4=u$. Отсюда $5x^4dx = du$.

Тогда исходный интеграл можно записать:

$$\int \frac{x^4 dx}{x^5+4} = \frac{1}{5}\int \frac{5x^4 dx}{x^5+4}$$

Сделаем замену переменной (второй вариант замены):

$$\frac{1}{5}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{5}\ln|u| + C = \frac{1}{5}\ln|x^5+4| + C$$

3. $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{5}} = \begin{vmatrix} \frac{x}{5} = t \\ \frac{dx}{5} = dt \\ dx = 5dt \end{vmatrix} = 5\int \frac{dt}{\cos^2 t} = 5tgt + C = 5tg\,\frac{x}{5} + C$.

4. $\int e^{-7x}dx = \begin{vmatrix} t = -7x \\ dx = -7dx \\ dx = -\frac{dt}{7} \end{vmatrix} = \int e^t\left(-\frac{dt}{7}\right) = -\frac{1}{7}\int e^t dt = -\frac{1}{7}e^t + C = -\frac{1}{7}e^{-7x} + C$ ·

5. $\int (x+1)^{11}dx = \begin{vmatrix} t = x+1 \\ dt = dx \end{vmatrix} = \int t^{11}dt = \frac{t^{12}}{12} + C = \frac{(x+1)^{12}}{12} + C$

6. $\int \cos(2-x)dx = \begin{vmatrix} t = 2-x \\ dt = -dx \\ dx = -dt \end{vmatrix} = \int \cos(-dt) = -\int \cos t dt = -\sin t + C = -\sin(2-x) + C$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+2}} = \begin{vmatrix} t = 3x+2 \\ dt = 3dx \\ dx = \frac{dt}{3} \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{3\sqrt[3]{t}} = \frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{3}}dt = \frac{1}{3}\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{2}\sqrt[3]{t^2} + C = \frac{\sqrt[3]{(3x+2)^2}}{2} + C$

8. $\int e^{x^2}\,2xdx = \begin{vmatrix} t = x^2 \\ dt = 2xdx \end{vmatrix} = \int e^t dt = e^t + C = e^{x^2} + C$

9. $\int \frac{(2x+3)dx}{x^2+3x+1} = \begin{vmatrix} t = x^2+3x+1 \\ dt = (2x+3)dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(x^2+3x+1) + C$

10. $\int x\sqrt{x^2+1}dx = \begin{vmatrix} t = x^2+1 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \frac{dt}{2} \end{vmatrix} = \int \sqrt{t}\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C$

6.4. Задания для самостоятельного решения
Метод непосредственного интегрирования

1.$\int (10 - x^7 + x^6)\, dx$;	2.$\int (6x - 3x^9 + 9x^8)\, dx$	3.$\int (6\,x^{11} + 4x - 1)\, dx$
4. $\int (6 - x^8 + 1/x^8)\ dx$	5.$\int (4 - x^7 + 1/x^7)\, dx$	6.$\int (9x - 3/x^4 + 2x^5)\, dx$
7.$\int\left(\frac{3}{x} + 2\sin x\right)dx$	8.$\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right)dx$	9.$\int \frac{x^4 - 5x^3 + 1}{x}dx$
10.$\int (x^2-2)(x+3)dx$	11.$\int\left[\frac{1-x}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}\right]dx$	12.$\int (\sqrt{x}+2)^2\, dx$
13. $\int \frac{\sin 2x}{3\sin x}dx$	14.$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}dx$	15.$\int \sin 6x\ \ dx$
16.$\int (\sin 4x - \cos 2x)dx$	17.$\int \frac{dx}{\cos^2(1-2x)}$	18.$\int \frac{dx}{\cos^2(a-bx)}$

19. $\int \frac{dx}{\sin^2 7x}$ 20. $\int x^2 \sin 3x^3 dx$ 21. $\int \frac{\sin 3x dx}{1+\cos 3x}$

Интегрирование методом замены переменной

1. $\int (7x-3)^3\, dx$;

2. $\int (4x+11)^7\, dx$

3. $\int (5x-3)^2\, dx$;

4. $\int (10x-11)^4 dx$

5. $\int \frac{8\,dx}{(3-2x)^4}$

6. $\int \frac{12dx}{(40-6x)^5}$

7. $\int \frac{7dx}{(4-14x)^6}$

8. $\int \frac{4dx}{(4-6x)^5}$

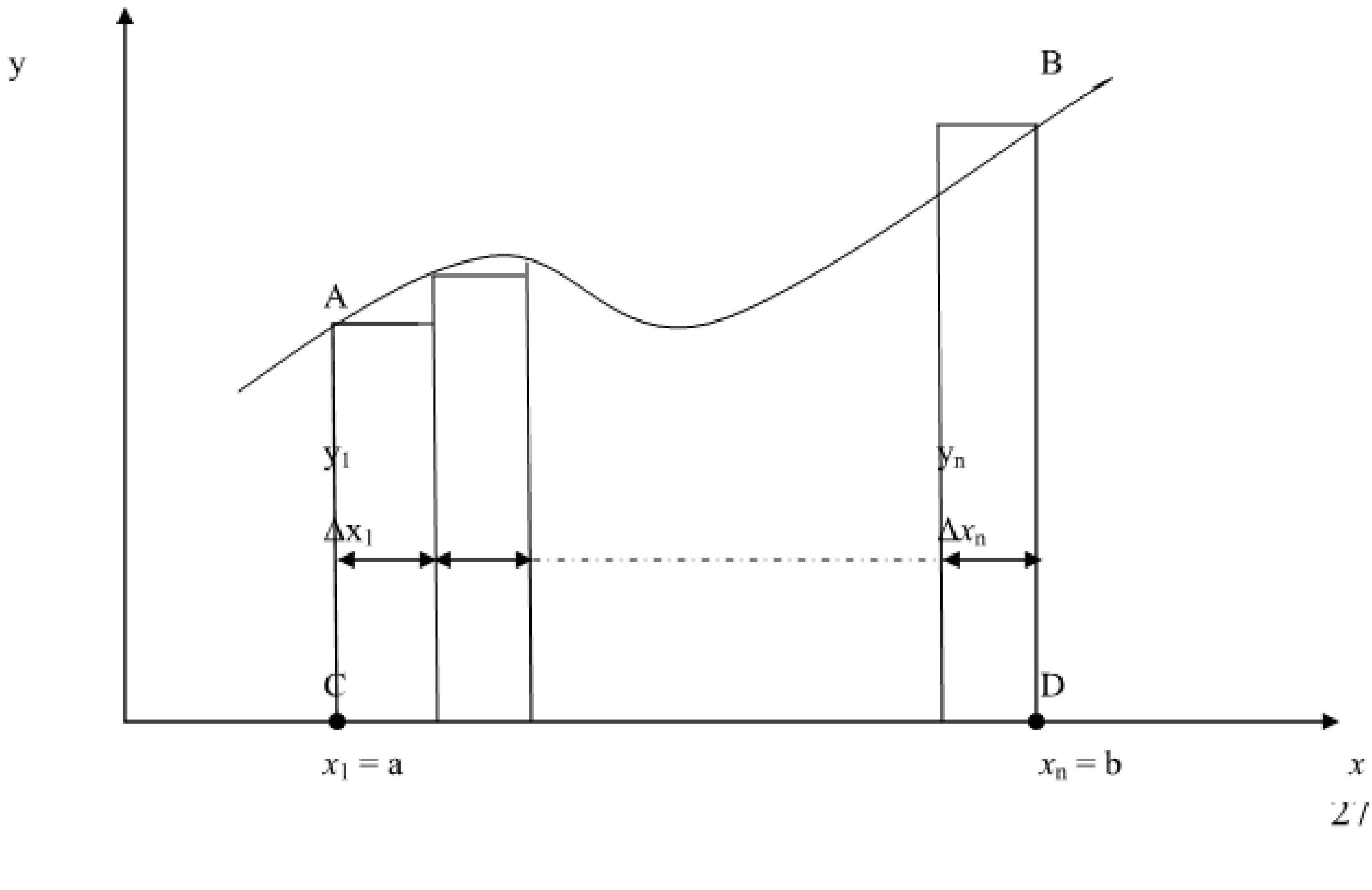
Применение интегрирования для решения задач

1.Скорость движения кисти руки задана уравнением v $=\frac{1}{2}tx^2+3$(м/с). Найти уравнение движения кисти, если за первые 6 секунд было пройдено 40 см.

2.Найти закон изменения скорости тела, если уравнение ускорения имеет вид: $a = 3t^2-4t+4$ (м/с) и если через 2 с скорость тела была 16 м/с.

6.5.Определенный интеграл

К понятию определенного интеграла подойдем из рассмотрения геометрической задачи. Допустим, что некоторая функция задана в виде графика. Поставим задачу: вычислить площадь криволинейной трапеции, которая образована графиком функции, осью абсцисс и ординатами, восстановленными из точек x_1=a, x_n=b



Приближенно, значение искомой площади можно найти, разбив криволинейную трапецию на отдельные прямоугольники и сложив их площади. Основанием этих прямоугольников служат малые интервалы Δx, а высотами – ординаты $y_1, y_2, \dots, y_n$. Если основания малы, то:

$$S_{ABCD} \approx \sum_{i=1}^{n} y_i \, \Delta x$$

Это соотношение выполняется тем точнее, чем меньше основания прямоугольников. Точное же значение искомой площади будет найдено при предельном переходе:

$$S_{ABCD} = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_i \, \Delta x_i = \int_a^b y dx$$

Сумма всех произведений, стоящая под знаком предела, называется **интегральной суммой**, а ее предел – **определенным интегралом** от функции на участке. Значения и называют, соответственно, нижним и верхним пределами интегрирования.

Из проведенного рассмотрения геометрической задачи следует:

1. Определенный интеграл имеет **геометрический смысл** площади фигуры, ограниченной графиком функции, осью абсцисс и ординатами, восстановленными из значений аргумента в пределах интегрирования.
2. Саму операцию интегрирования можно описать как сложение бесконечно большого количества бесконечно малых величин. Действительно, в формуле при стремлении$\Delta x_i \to 0$ каждое слагаемое $y_i \Delta x_i \to 0$ (т. е. является бесконечно малой величиной – каждый отдельный прямоугольник стремится выродиться в линию). Но число этих слагаемых стремится к бесконечности.

6.6.Свойства определенного интеграла

1. Определенный интеграл от суммы конечного числа функций заданных на отрезке, равен сумме определенных интегралов от слагаемых функций

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)dx$$

2. Постоянный множитель к подынтегральной функции можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

3. Если верхний и нижний пределы интегрирования поменять местами, то определенный интеграл сохранит абсолютную величину и изменит свой знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

4. Если пределы интегрирования равны между собой, то определенный интеграл равен нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

6.7.Связь между определенными и неопределенными интегралами. Формула Ньютона-Лейбница

Вычисление определенного интеграла производится с помощью формулы **Ньютона – Лейбница**: $\int_a^b f(x)dx = \mathbf{F(x)}\big|_a^b = \mathbf{F(b)} - \mathbf{F(a)}$

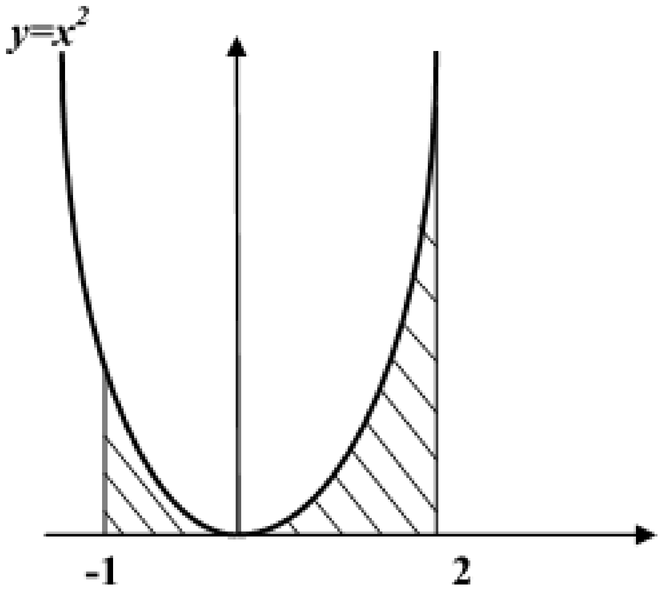
То есть, для нахождения определенного интеграла необходимо найти для подынтегральной функции первообразную и взять разность значений этой функции на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Пример.

Вычислить: $\int_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

6.8. Использование определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур

Пример 1.



Возьмем параболу **$y=x^2$** и поставим задачу: **вычислить площадь фигуры S, образованной графиком параболы, осью x и ординатами, восстановленными из значений: $x_1=-1$ и $x_2=2$.**

На рисунке искомая площадь заштрихована. Задача сводится к нахождению определенного интеграла:

$$S = \int_{-1}^{2} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{3} = 3$$

Пример 2.

Найти работу при растяжении мышцы на 4 см, если для ее растяжения на 1см требуется нагрузка 10 Н. Считать, что сила, необходимая для растяжения мышц пропорциональна ее удлинению.

Решение.

$$\mathrm{A} = \int_0^{0.04} dA = \int_0^{0.04} kx \cdot dx = \mathrm{k}\frac{x2}{2}\Big|_0^{0.04}$$

Найдем жесткость пружины: $\mathrm{F} = \mathrm{kx}, \mathrm{k} = \frac{F}{x} = \frac{10}{0.01} = 10^3\,\frac{\text{Н}}{\text{м}}$;

A=0.8 (Дж).

Задания для самостоятельного решения

Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями, изобразить эту площадь графически:

1	$y = x^2+1,\ y=0,\ x=-1,\ x=3$
2	$y=-x^2,\ y=0,\ x=-1,\ x=3$
3	$y=2x-x^2,\ y=0$
4	$y=3x-1,\ y=0,\ x=2,\ x=4$
5	$y=5x,\ y=0,\ x=2$
6	$y=x^3\ y=4x$
7	$y=2x-x^2,\ y=0$
8	$y = x^2, x = 8, x = 0, y = 0.$
9	$y = 3 + 2x - x^2, y = 0.$
10	$y = 3x^4 - 4x^3, y = 0.$
11	$y = x + x^2, x = 1, x = 4, y = 0.$
12	$y = \frac{1}{x}, x = 1, x = a, a > 0, y = 0.$
13	$y = 3 - 2x, y = x^2.$
14	$y = e^x, x = 1, x = 0, y = 0.$
15	$y = 3x^2 - 2x, y = 0.$
16	$y = 4x - x^2, y = 0.$

МОДУЛЬ 2
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕУРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В МЕДИЦИНЕ
7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
7.1Дифференциальное уравнение, его порядок и его решение

Дифференциальное уравнение − это равенство, связывающее независимую переменную x неизвестную функцию *f(x),* производные.

$F(x,y,y',y'',...,y^n) = 0$ − общий вид дифференциального уравнения:

F- известная функция, заданная в некоторой фиксированной области;

x- независимая переменная; y- зависимая переменная; $y',y'',...,y^n$.- ее производные.

Обыкновенное дифференциальное уравнение – это уравнение, в котором неизвестная функция зависит только от одного аргумента.

***Порядок* дифференциального уравнения** − это порядок высшей производной, содержащейся в этом уравнении. Например: уравнение $y'' + 5y'-3y= 0$ − это дифференциальное уравнение второго порядка.

Решение (интеграл) уравнения — это функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению. Например, функция $y = 2x$ является интегралом уравнения $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$, так как, найдя производные этого уравнения и подставляя их в данное уравнение, мы получим тождество $-4x + 4x =0$.

Общее решение – это решение, зависящее от произвольных постоянных. Оно содержит столько независимых постоянных, каков порядок уравнения.

Частное решение—это функция, получаемая из общего решения при различных числовых значениях произвольных постоянных. Для нахождения частных решений задают дополнительные условия. Эти условия называются ***начальными*** *или* ***условиями Коши.***

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

$P(x,y)dx+ Q(x,y)dy = 0$, если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ разлагаются на множители, зависящие каждый только от одной переменной: $f_1(x)f_2(y)dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0$.

Линейные однородные дифференциальные уравнения первого порядка

$y' + p(x)y = 0$, *где p(x) и q(x) — непрерывные функции.*

$y = Ce^{\int p(x)dx}$ общее решение уравнения

Линейными неоднородными дифференциальными уравнениями первого порядка:

$y' + p(x)y =q(x),$

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$$ общее решение уравнения

Пример

1.Найти общее и частное решение дифференциального уравнения методом разделения переменных

$$y' = 2x \qquad y(2) = 8$$

Решение.

Данное уравнение разделим на множители, зависящие только от одной переменной:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$dy = 2xdx$$

Проинтегрируем левую и правую части уравнения:

$$\int dy = 2\int xdx \ => y = x^2 + C$$

Общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y = x^2 + C$$

Подставим начальные условия, найдем С.

8=4 + С, С = 4

Тогда частное решение данного дифференциального уравнения в точке ***y(2) = 8:***

$$y = x^2 + 4$$

2.Найти общее и частное решение дифференциального уравнения методом разделения переменных

$$y' = 2y \qquad y(0) = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 2y$$

Произведем разделение переменных и последующее интегрирование:

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int dx$$

$$\ln y = 2x + \ln C$$

$$\ln y = \ln e^{2x} + \ln C$$

Потенцируя, получим общее решение дифференциального уравнения:

$$y = Ce^{2x}$$

Подставим начальные условия, найдем С.

1=С

Тогда частное решение данного дифференциального уравнения в точке ***y(0) = 1:***

$$y = e^{2x}$$

7.2Этапы решения задач при использовании дифференциальных уравнений

Математические уравнения, описывающие различные медико-биологические процессы, обычно включают в себя не только неизвестные функции, но и их производные – скорости, ускорения и т.д. Такими уравнениями описываются биохимические процессы, происходящие в организме, процессы размножения и гибели бактерий, распространение импульсов в нервных и мышечных волокнах, транспорт и накопление в организме лекарственных препаратов и т.д.

В уравнениях, описывающих медико-биологические процессы, в качестве независимой переменной чаще всего используется временная компонента. Поэтому искомая функция обычно описывает изменение некоторых параметров биологических систем во времени.

I. **Составление дифференциального уравнения.**

Этот этап наиболее сложный и ответственный. Здесь необходимо учесть все факторы, которые влияют на течение исследуемого процесса, возможно, сделать некоторые допущения, определить начальные условия. При этом исследователь должен опираться на твердо установленные экспериментальные факты или логические посылки. Например, при создании математических моделей работы сердца их практическая полезность (получение новых сведений, позволяющих улучшить диагностику сердечно - сосудистых заболеваний и повысить эффективность их лечения) определится полнотой и корректностью математического учета физиологических данных и клинической практики.

II. **Определение типа уравнения.**

III. **Решение уравнения.**

Этот этап может считаться более простым, чем первый, поскольку он предполагает выполнение только математических операций. Если невозможно получить решение дифференциального уравнения в аналитическом виде, то оно может быть решено расчетным путем с применением современной вычислительной техники.

IV. **Оценка и анализ результата.**

Получив решение дифференциального уравнения (или системы уравнений), необходимо оценить, какова теоретическая и практическая полезность полученных результатов - установлены ли новые закономерности в протекании, например, физиологических процессов; определено ли количественно влияние выбранных факторов, например, на степень развития и характер патологии и т.п.

Кроме того, следует сопоставить полученные результаты с имеющимися установленными фактами. Если из математического описания физиологического процесса следуют неожиданные и неизвестные ранее сведения, то это может означать:

1) действительно установлено новое явление, которое впоследствии может быть подтверждено экспериментальными исследованиями;

2) полученный результат возник из-за того, что на этапе составления дифференциального уравнения не учтены все необходимые факторы или сделаны слишком грубые допущения.

7.3. Примеры использования дифференциальных уравнений
Пример 1

Рассмотрим микробиологическую задачу.

Установим закон изменения со временем *(t)* численности бактерий (*n*), помещенных в питательную среду.

Для **составления** дифференциального уравнения, отражающего существование бактерий в этих условиях, необходим некоторый факт, который следует записать в математической форме. На основании экспериментальных данных и общих соображений таким фактом может служить утверждение: «скорость размножения бактерий (математически $\frac{dn}{dt}$) пропорциональна их числу (n) в данный момент времени».

Таким образом, необходимое дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\boldsymbol{\frac{dn}{dt} = kn,}$$

где k - доступный экспериментальному определению коэффициент пропорциональности, зависящий от вида бактерий и параметров среды их обитания. Дополнительные данные, необходимые для решения задачи следуют из начального условия: при $t = 0, n = n_0$, т.е. в начальный момент времени количество бактерий считается известным и равным n_0.

Для **решения** уравнения произведем разделение переменных и последующее интегрирование:

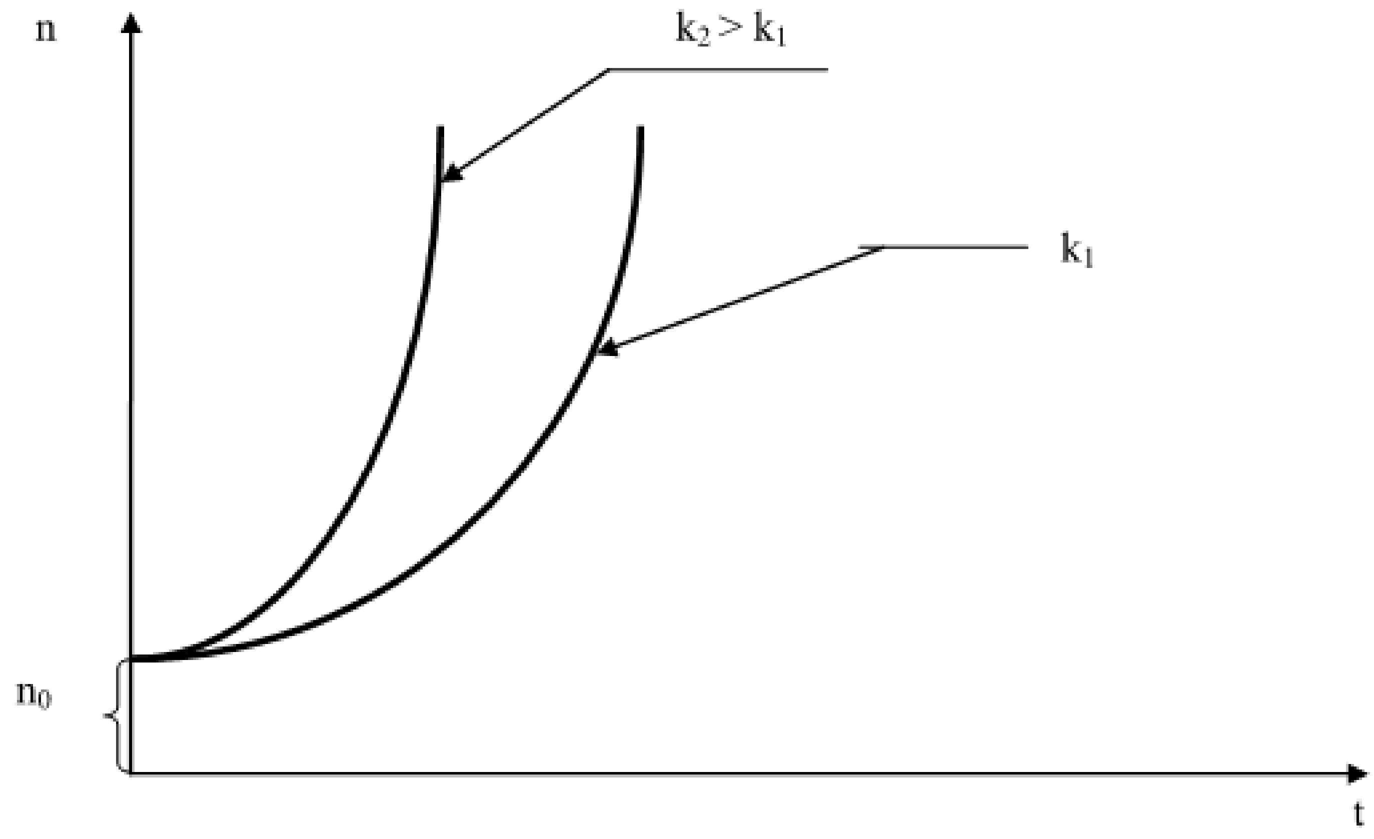
$$\int \frac{dn}{n} = k \int dt \;\; => \ln n = kt + \ln C$$

Потенцируя и полагая $C=n_0$, получим искомый закон изменения числа бактерий со временем: $\boldsymbol{n=n_0e^{kt}}$

Произведем некоторый **анализ** результата. В чем его сиюминутная практическая полезность и возможные более отдаленные выводы?

1) Зная коэффициент k и начальное число бактерий n_0, легко определить их число в любой момент времени t

2) Прирост бактериальной массы определяется через коэффициент kусловиями среды



Если существуют факторы, препятствующие размножению бактерий(повышенная температура, ионизирующие излучения и др.), то коэффициент *k*в формулах уменьшается и может принять отрицательное значение - в этом случае будет наблюдаться гибель бактерий.

3) С некоторым риском можно попытаться придать полученному для бактерий результату большую общность и сформулировать утверждение: *“любой биологический вид, находясь в оптимальных для своего существования условиях, экспоненциально увеличивает свою численность со временем”*. Так, кролики, завезенные в Австралию, где практически нет хищников, которые бы ими питались, увеличили свое число в соответствии с формулой и стали представлять серьезную опасность для сельского хозяйства.

Пример 2

Установим закон радиоактивного распада ядер атомов.

Для составления исходного дифференциального уравнения обозначим N число нераспавшихся ядер атомов в данный момент времени t, N_0— число нераспавшихся ядер в начальный момент времени ($t = 0$). В процессе радиоактивного распада число N убывает. Обозначим через dN убыль нераспавшихся ядер за малый промежуток времени dt. Эта убыль, естественно, пропорциональна промежутку времени dt и числу нераспавшихся ядер N:

$$dN = - \lambda N dt$$

где λ - постоянная величина радиоактивного распада. Знак “минус” в формуле отражает тот факт, что число нераспавшихся ядер со временем уменьшается.

Решая уравнение методом разделения переменных с учетом начального условия (при $t= 0, N = N_0$), получим закон радиоактивного распада:

$$N=N_0e^{-\lambda t}$$

Уравнение описывает убывание количества нераспавшихся ядер за счет радиоактивного распада.

Допустим теперь, что некоторое количество радионуклидов **одномоментно поступило в организм**. Убыль (dN) нераспавшихся радиоактивных ядер в организме будет определяться двумя процессами:

1) физическим распадом ядер;

2) биологическим выведением радиоактивных веществ из организма; Дифференциальное уравнение, отражающее эти два процесса, будет иметь вид:

$dN = -(\lambda+\lambda_в) N\,dt$, где $\lambda_в$– постоянная величина биологического выведения.

Решение уравнения представляет закон исчезновения радионуклидов из организма при указанных условиях и имеет вид:

$$N = N_0e^{-(\lambda+\lambda_b)t}$$

Пример 3.

Рассмотрим внутривенное введение некоторого лекарственного вещества (например, глюкозы) через капельницу.

Будем считать, что оно вводится в кровь с постоянной скоростью v, а выводится из крови со скоростью, пропорциональной ее количеству m, содержащемуся в крови на данный момент времени t. Поставим задачу: найти закон, определяющий зависимость количества лекарственного вещества в крови от времени, т.е. $m = f(t)$. Задача сводится к нахождению вида функции $\boldsymbol{m = f(t)}$.

Тогда дифференциальное уравнение, описывающее этот процесс, имеет вид:

$$\frac{dm}{dt} = v - km,$$

гдеm- количество глюкозы в крови в текущий момент времени;

v – скорость поступления глюкозы в кровь;

k – постоянная, характеризующая интенсивность процесса утилизации.

Запишем это уравнение в виде:

$$m' + km = v$$

Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка, и его общее решение находится:

$$m(t) = e^{-\int k dt}(C + \int v e^{\int k dt} dt) = e^{-kt}(C + v\int e^{kt} dt) =$$

$$= e^{-kt}(C + \frac{v}{k} \cdot e^{kt}) = Ce^{-kt} + \frac{v}{k}$$

$$m(t) = Ce^{-kt} + \frac{v}{k}$$

где C – постоянная интегрирования.

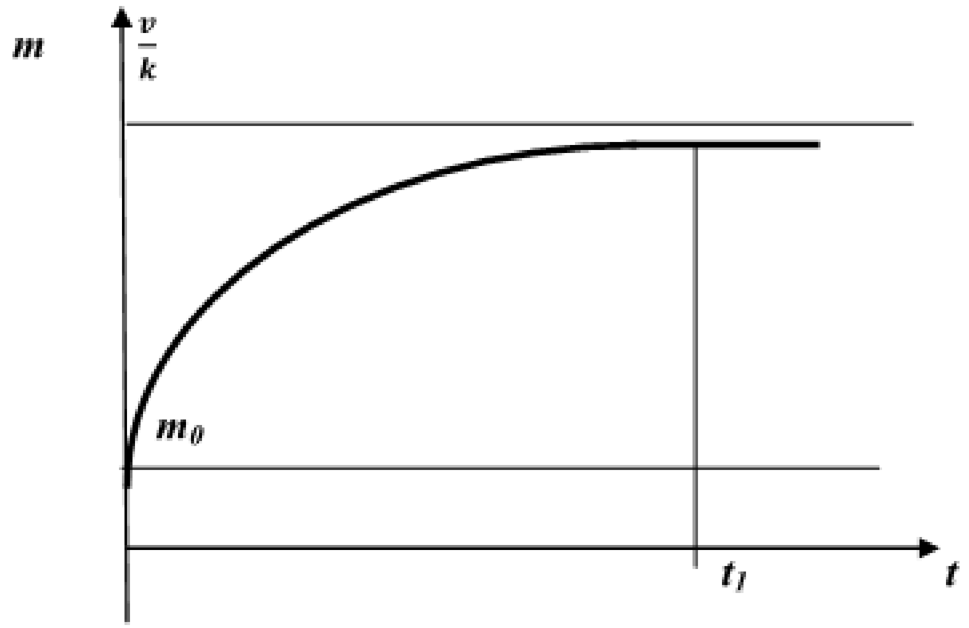
Начальное условие можно записать:

При t=0, $m=m_0$, где m_0 - имеющаяся в крови масса вещества до начала введения.

$$m_0 = C + \frac{v}{k} => C = m_0 - \frac{v}{k}$$

Искомая зависимость содержания лекарственного препарата в крови от времени:

$$\boldsymbol{m(t) = \frac{v}{k} + (m_0 - \frac{v}{k})e^{-kt}}$$



Графически эта зависимость показана на рисунке. При длительном введении вещества ($t \to \infty$) его содержание в крови все равно не превысит некоторого максимального уровня $\boldsymbol{m_{max} = \frac{v}{k}}$, поскольку при $t \to \infty$ второе слагаемое формулы обращается в нуль. Из рисунка следует, что введение следует прекращать в момент времени $\boldsymbol{t_1}$, поскольку после этого наступает, практически, эффект насыщения. Отмеченный на графике уровень $\boldsymbol{m_0}$соответствует содержанию вещества в крови до начала введения.

Выводы.

Вспомним слова А.Пуанкаре: «Математика-это искусство давать разным вещам одно наименование». Эти слова являются выражением того, что математика изучает одним методом, с помощью математической модели, различные явления действительного мира.

$\boldsymbol{n=n_0e^{kt}}$ - закон изменения числа бактерий со временем;

$N=N_0e^{-\lambda t}$- закон радиоактивного распада,

$\boldsymbol{m(t) = Ce^{-kt} + \frac{v}{k}}$-закон изменения концентрации.

Общие решения примерно одного вида, хотя речь шла о процессе разложения бактерий, о радиоактивном распаде, об изменении концентрации препарата. **В этом проявляется важное свойство математических моделей*: свойства общности*.**

Рассмотренные примеры касались количественного описания с помощью дифференциальных уравнений сравнительно простых явлений. Естественно, что рассмотрение более сложных задач требует и более сложного математического аппарата. Однако, использование математических методов для анализа процессов жизнедеятельности, изучения внешних воздействий на организм, разработки методов диагностики и лечения, совершенно необходимо для понимания сущности этих явлений и имеет несомненную практическую значимость.

7.4. Задания для самостоятельного решения

1.1.Найти общее решение дифференциальных уравнений методом разделения переменных

1) $y' = 2y;$	2) $y' = \sin x;$
3) $y' = 2x + 1;$	4) $y' = y\cos x;$
5) $xy' - y = 0;$	6) $y' = 2xy;$
7) $3xdy = 2ydx;$	8) $x^2y' + y = 0;$
9) $e^xy' = 1;$	10) $y' = e^{3x+1}$

1.2.Найти частное решение дифференциальных уравнений методом разделения переменных

1) $xdx = dy;$ $y(1) = 0;$	2) $xdx = dy;$ $y(2) = 1;$
3) $ydy - xdx = dx;$ $y(2) = 0;$	4) $2xy' = y;$ $y(9) = 6;$
5) $x^2y' = y;$ $y(0) = 5;$	6) $2y'\sqrt{x} = y;$ $y(4) = 1;$
7) $xy' = \frac{y}{\ln x};$ $y(e) = 1;$	8) $y' + ytgx = 0;$ $y(0) = 2$

1.3.Найти общее решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

1) $y' - y = e^x$ 2) $xy' + y = e^x$

3) $y' + x^2 y = x^2$ 4) $xy' + y = 3;$

5) $y' - \frac{1}{x} y = 3x$ 6) $x y' + 2y = 4$

7) $xy' - y = x^2 \cos x$ 8) $x y' = 2y + x^4$

1.4.Составьте дифференциальные уравнения и найдите частные решения:

1. Концентрация лекарственного препарата в крови уменьшается вследствие выведения вещества из организма. Скорость уменьшения концентрации пропорциональна концентрации вещества в данный момент. Определить зависимость концентрации данного вещества в крови от времени, если в начальный момент времени она была равна 0,2 мг/л, а через 23 часа уменьшилась вдвое.

2. Популяция бактерий $x(t)$ растет так, что скорость ее роста в момент времени t (t - часы) равна одной десятой от размера популяции. Описать этот процесс роста дифференциальным уравнением. Чему равен размер популяции спустя 10 часов, если начальное условие $x(0) = 1000$?

3. Скорость растворения лекарственного вещества в таблетках пропорциональна количеству лекарства в таблетке. Известно, что при $t = 0$, $m = m_0$. Найти закон растворения таблетки, если период полурастворения T.

4. Скорость сокращения мышцы описывается уравнением $\frac{dx}{dt} = \beta(x \quad x_0)$, где x_0 — полное сокращение мышцы; β - постоянная величина, зависящая от нагрузки; x- сокращение мышцы в данный момент. Найти закон сокращения мышцы, если $x = 0$ при $t = 0$.

Эталоны ответов

1.4

1.Решение:

Скорость изменения концентрации и концентрация **C** в любой момент времени связана соотношением: $$-\frac{dC}{dt} = kC$$

где k - коэффициент пропорциональности, который не зависит от времени.

Знак « - » поставлен потому, что концентрация убывает с ростом времени.

Решаем это уравнение 1-го порядка методом разделения переменных:

$\frac{dC}{C} = -kdt$После интегрирования это дает:

$lnC = -kt + lnC_0,$ $C = C_0e^{-kt}$

Подставляя концентрацию при *t*=0, найдем $C_0 =$ *0,2мг/л*

При t= 23 часа $0{,}1 = 0{,}2.e^{-23k}$ или $2 = e^{23k}$.

$$\boldsymbol{k = \frac{ln2}{23} = \frac{0,69}{23} = 0,03ч^{-1}}$$

Закон изменения концентрации: $C(t) = 0{,}2e^{-0{,}03t}$ *(мг/л).*

2. Решение:

Пусть *x(t)* - размер популяции в момент времени. Скорость роста $\frac{dx}{dt}$. Тогда по условию скорость роста $\frac{dx}{dt}$в момент времени t равна 0,1 *x*. Это дифференциальное уравнение 1-го порядка. Решим его: $\boldsymbol{\frac{dx}{x} = 0,1dt}$;

$$\boldsymbol{ln|x| = 0,1t + lnC; ln|x| = 0,1t\, ln\, e + lnC}$$

$\boldsymbol{x=Ce^{0,1\,t}}$ *–общее решение*

Если t = 0, x= 1000.

Найдем С: 1000 = С

$\boldsymbol{x= 1000e^{0,1\,t}}$ *– частное решение*

После 10 часов размер популяции становится равным:

$$X(10) = 1000e^{0,1\cdot 10} = 1000e = 2718.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.

Числовая последовательность. Предел последовательности. Теоремы о пределах числовой последовательности.

Определение

Бесконечной числовой последовательностью называется числовая функция, определённая на множестве N натуральных чисел.

Пример: (a_n): 1; 2; 3; 4; 5; 6…

(b_n): 2; 4; 6; 8; 10; 12;

3) (a_n): 2; 2; 2; 2 …- постоянная последовательность.

Определение

Число a называется пределом числовой последовательности x_n, если для любого $\varepsilon \geq 0$ все члены последовательности x_n, кроме, может быть, конечного числа, лежат в ε - окрестности числа a: $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$, то есть найдётся такое натуральное N, что при n>N выполнено неравенство:

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

Обозначение: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$

Теоремы о пределах.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = a$, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = b$, тогда:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) + \lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = a + b$

Следствие

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a - b$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \times b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) \times \lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = a \times b$

3) Пусть $b \neq 0$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)} = \dfrac{a}{b}$

Определение Последовательность называется бесконечно малой, если её предел равен нулю.

Свойства бесконечно малых последовательностей.

1) Сумма двух бесконечно малых последовательностей являются бесконечно малой.

2) Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую является бесконечно малой.

Следствие: Произведение двух бесконечно малых является бесконечно малой.

3) Для того, чтобы выполнялось равенство $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, необходимо и достаточно, чтобы $x_n = a + a_n$, где $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Определение. Последовательность (a_n) называется бесконечно большой, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

Примеры:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right) = \left|\begin{array}{l|l} 2n+1 & n+1 \\ 2n+2 & 2 \\ -1 & \end{array}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 2$, так как $(a_n) = \dfrac{1}{n+1}$ - бесконечно малая величина и: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1} = 0$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+3}{n^3+2n-4} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] =$ (делим числитель и знаменатель на n^3) =

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{3}{n^3}}{1 + \dfrac{2}{n^2} - \dfrac{4}{n^3}} = \left(\frac{0+0+0}{1+0-0}\right) = 0$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^4-5}{n^3+2n-1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{5}{n^4}}{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{1}{n^4}} = \left(\dfrac{2-0}{0+0-0}\right) = \infty$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+n^2+n}{-5n^3+1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{-5+\dfrac{1}{n^3}} = \left(\dfrac{3+0+0}{-5+0}\right) = -\dfrac{3}{5}$

Выводы:

1) Если степень числителя выше степени знаменателя, то предел последовательности равен ∞.

2) Если степень знаменателя выше степени числителя, то предел последовательности равен нулю.

3) Если старшие степени числителя и знаменателя равны, то предел последовательности равен отношению коэффициентов при старших степенях.

Задания для самостоятельного решения:

Вычислить пределы.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+7n^2-2}{6n^3-4n-1}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2n+4n^2}{n^3-3n^2+7}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4n-n^4}{n+3n^2+2n^4}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^6-n^3-2n}{2n^6-1}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+n^2-3n^3}{1-3n+6n^3}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-4n+2}{6n^3-4n-1}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+1}{\sqrt{4n^2+1}}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n-3}{\sqrt{4n^4-3n+2}}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^5-2n+1}{1-3n^2+n^5}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+3n+n^2}{4n^4-1}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^5+n^2-n}{n^3-1}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-3n+n^2}{4-n^3+n}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^3+n^2+1}{n^2+n+2}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^6-2n+1}{5n^7+3n^4+2}$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{25n^2-3}}{5n+1}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^4+1}}{n^2-3}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

План исследования функции.
Построение графика функции с помощью производной.
Алгоритм исследования функции.

1. Найти область определения функции D(y).
2. Исследовать функцию на чётность - нечетность, периодичность.
3. Найти промежутки знакопостоянства функции.
4. Найти промежутки монотонности и её экстремумы.
5. Найти промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба.
6. Найти точки пересечения графика с осями координат (если возможно).
7. Дополнительные точки.
8. Построить график.

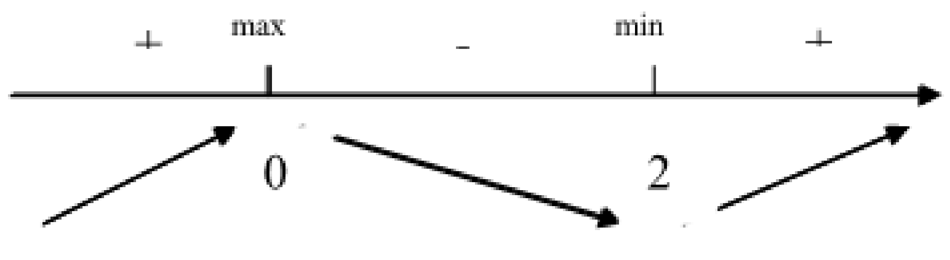
Пример. Исследовать функцию y = $x^3 - 3x^2$ и построить ее график.

1. Найдём область определения: D(y) = (- ∞; + ∞).
2. y(-x) = - $x^3 - 3x^2 \neq -y(x) \neq y(x)$ − функция не является ни чётной ни нечётной. График симметрии не имеет.
3. Исследуем функцию на монотонность и экстремум:

   $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

   $3x(x - 2) = 0$

   $x = 0$, $x = 2$ – критические точки функции



Функция возрастает на промежутках: (- ∞; 0); (2; + ∞).

Функция убывает на промежутке: (0; 2).

Точки экстремума: $x_{max} = 0$; $x_{min} = 2$.

Экстремумы функции: $f(0) = 0^3 - 3\cdot0^2 = 0$; $f(2) = 2^3 - 3\cdot2^2 = 8 - 12 = -4$.

Точки, соответствующие точкам экстремума: A(0; 0); B(2; - 4).

4. Исследуем функцию на выпуклость

$y'' = 6x - 6$

$6x - 6 = 0$

$x = 1$ – критическая точка второго рода

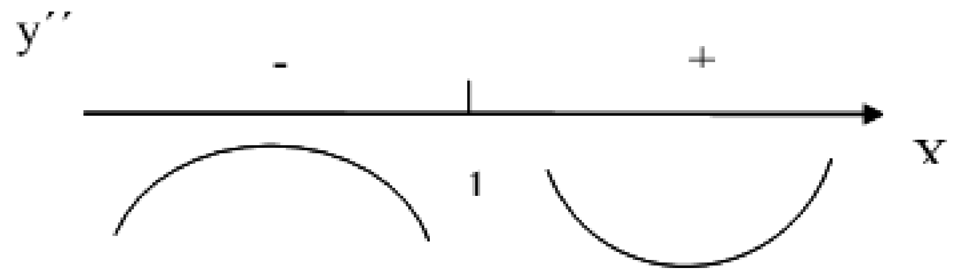


График функции выпуклый вверх на промежутке: $(-\infty; 1)$

График функции выпуклый вниз на промежутке: $(1; +\infty)$

$f(1) = 1^3 - 3\cdot 1^2 = 1 - 3 = -2$

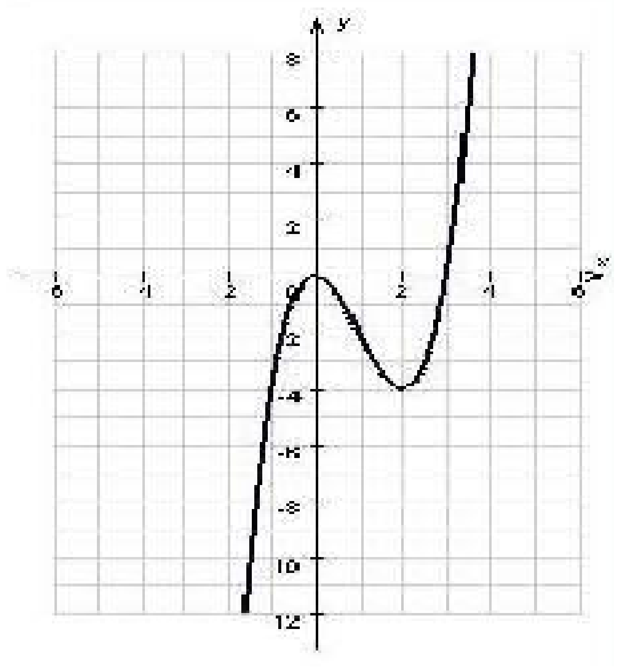
Точка перегиба: C(1; - 2)

5. Дополнительные точки:

$x = -1$: $f(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1)^2 = -1 - 3 = -4$; D(- 1; -4)

$x = 3$: $f(3) = 3^3 - 3\cdot 3^2 = 27 - 27 = 0$; E (3; 0).

6. Построение графика функции



СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, С.П. Данко. – 7-е изд., испр. – М.: Мир и Образование, 2014. – 816 с.
2. Демидович Б.П. Дифференциальные уравнения: учеб. пособие / Б.П. Демидович, В.П. Моданов. – 3-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2008. – 288 с.
3. Омельченко В.П. Математика. Компьютерные технологии в медицине: учеб. для студентов медицинских учреждений СПО / В. П. Омельченко, А.А. Демидова. – Изд. 2-е, испр. – Ростов н/Д: Феникс, 2010. – 588 с.
4. Омельченко В.П. Математика: учеб. пособие для СПО / В.П. Омельченко, Э.В. Курбатова. – 5-е изд., доп. и перераб. – Ростов н/Д: Феникс, 2011. – 380 с.